

Technische Numerik

25. Für das Einheitsdreieck

$$\tau = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

betrachte man die numerische Integrationsformel

$$\int_{\tau} f(x, y) dx dy = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} f(x, y) dy dx \approx \sum_{k=0}^n w_k f(x_k, y_k).$$

Man zeige, dass

a) die Integrationsformel

$$\sum_{k=0}^0 w_k f(x_k, y_k) := \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

die Polynome  $p_1(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y$ ,

b) die Integrationsformel

$$\sum_{k=0}^2 w_k f(x_k, y_k) := \frac{1}{6} (f(0, 0) + f(1, 0) + f(0, 1))$$

die Polynome  $p_1(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y$  und

c) die Integrationsformel

$$\sum_{k=0}^2 w_k f(x_k, y_k) := \frac{1}{6} \left( f\left(\frac{1}{2}, 0\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + f\left(0, \frac{1}{2}\right) \right)$$

die Polynome  $p_2(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2$

exakt integrieren.

26. Man bestimme die LR-Zerlegung, die Cholesky-Zerlegung und die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

und löse anschließend mit jeder Zerlegung das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

27. Für einen Vektor  $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$  sei durch

$$\|\underline{u}\|_1 := \sum_{k=1}^n |u_k|$$

die Summennorm, durch

$$\|\underline{u}\|_2 := \left( \sum_{k=1}^n u_k^2 \right)^{1/2}$$

die Euklidische Norm, und durch

$$\|\underline{u}\|_\infty := \max_{k=1,\dots,n} |u_k|$$

die Maximum-Norm definiert. Man beweise die Äquivalenzungleichungen

$$\begin{aligned} \|\underline{u}\|_\infty &\leq \|\underline{u}\|_1 \leq n \|\underline{u}\|_\infty, \\ \|\underline{u}\|_\infty &\leq \|\underline{u}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\underline{u}\|_\infty, \\ \|\underline{u}\|_2 &\leq \|\underline{u}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\underline{u}\|_2, \end{aligned}$$

für alle  $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$  und zeige, dass diese scharf sind, d.h. Gleichheit angenommen wird.