

Technische Numerik

Für eine konvergente Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit Grenzwert \bar{x} ist die *experimentelle Konvergenzordnung* (experimental order of convergence) durch

$$\text{eoc} = \frac{\ln |x_k - \bar{x}| - \ln |x_{k-1} - \bar{x}|}{\ln |x_{k-1} - \bar{x}| - \ln |x_{k-2} - \bar{x}|}, \quad k \geq 2,$$

gegeben.

31. Man zeige, dass die Abbildung

$$\Phi(x) := \frac{1}{2} \left(x + \frac{9}{x} \right)$$

in $[3, 9]$ eine Selbstabbildung und eine Kontraktion ist, d.h. für $x \in [3, 9]$ ist $\Phi(x) \in [3, 9]$ und es gibt $q < 1$, sodass

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq q |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [3, 9]$$

gilt. Durch Anwendung des Fixpunktsatzes von Banach berechne man den Fixpunkt $\bar{x} \in [3, 9]$. Weiters berechne man x_k für $k = 1, 2, 3, 4, 5$ mittels der Methode der sukzessiven Approximation für die Startnäherung $x_0 = 9$ und bestimme den zugehörigen Fehler $|x_k - \bar{x}|$ und die experimentelle Konvergenzordnung eoc. Welche Konvergenzordnung $p \in \mathbb{R}$ liefert der Fixpunktsatz von Banach für die Methode der sukzessiven Approximation?

(*Hinweis:* Die Rechnungen müssen nicht händisch berechnet werden.)

32. Für die Lösung der Gleichung

$$x^2 = 4 \quad \text{für } x \in [1, 4]$$

bestimme man die Iterationsvorschrift

- des Bisektionsverfahrens mit $a = 1$, $b = 4$,
- der Sekanten-Methode mit $x_0 = 1$, $x_1 = 4$,
- des Newton-Verfahrens mit $x_0 = 1$.

Man berechne für alle drei Verfahren Näherungslösungen x_5 , die zugehörigen Fehler $|x_k - 2|$ für $k = 0, 1, \dots, 5$ und experimentelle Konvergenzordnungen eoc.

(*Hinweis:* Die Rechnungen müssen nicht händisch berechnet werden.)

33. Für die Bestimmung des Schnittpunkts der Funktionen $h(x) = x$ und $g(x) = \cos x$ für $x \in [0, 1]$ leite man eine Methode der sukzessiven Approximation her und zeige, dass die entsprechende Funktion Φ eine Selbstabbildung auf $[0, 1]$. Man darf verwenden, dass die Funktion Φ auch eine Kontraktion auf $[0, 1]$ ist. Man berechne die Näherungslösungen x_k für $k = 1, \dots, 8$ für die Startnäherung $x_0 = \frac{1}{2}$ mittels der Methode der sukzessiven Approximation. Weiters berechne man den zugehörigen Fehler $|x_k - \bar{x}|$ für $k = 1, \dots, 8$ mit dem Fixpunkt $\bar{x} \approx 0.7390851332151607$ und die experimentelle Konvergenzordnung eoc.

(*Hinweis:* Die Rechnungen müssen nicht händisch berechnet werden.)