Technische Numerik

28. Man benütze das Jacobi- und das Gauß–Seidel-Verfahren zur Bestimmung von Näherungslösungen von

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Man führe ausgehend vom Startvektor $\underline{x}^0 = (1,1,1)^\top$ zwei Schritte der beiden Verfahren durch. Weiters berechne man jeweils den Fehler $\|\underline{x} - \underline{x}^k\|_2$ für $k = 0,1,2$, wobei $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ die exakte Lösung des gegebenen linearen Gleichungssystems bezeichne.
Konvergieren das Jacobi- und das Gauß–Seidel-Verfahren für jede Startnäherung $\underline{x}^0$ für das gegebene lineare Gleichungssystem?

29. Für die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$ betrachte man das Gradientenverfahren des steilsten Abstiegs,

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - \alpha_k \underline{r}^k, \quad \underline{r}^k = A\underline{x}^k - \underline{f}, \quad \alpha_k = \frac{(\underline{r}^k, \underline{r}^k)}{(A\underline{r}^k, \underline{r}^k)} \quad \text{für } k = 0,1,2,\ldots, \quad \underline{x}^0 = \underline{0}.$$

Man bestimme die Näherungslösungen $\underline{x}^1$, $\underline{x}^2$ und $\underline{x}^3$ und berechne die normierten Vektoren

$$\frac{\underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k}{\|\underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k\|_2} \quad \text{für } k = 0,1,2.$$

Weiters berechne man den Fehler $\|\underline{x} - \underline{x}^k\|_2$ für $k = 0,1,2,3$.

30. Gegeben seien die Matrix A und die Vektoren $\underline{e}^k$, $k = 1,2,3$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme ein System A-orthogonaler Vektoren $\{\underline{w}^k\}_{k=1}^3$ mit

$$(A\underline{w}^k, \underline{w}^\ell) = 0 \quad \text{für } k \neq \ell$$

mittels Gram–Schmidtschen-Orthogonalisierungsverfahrens und verwende dieses zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \underline{w}^k.$$

Warum sind die Koeffizienten α_k durch

$$\alpha_k = \frac{(\underline{f}, \underline{w}^k)}{(A\underline{w}^k, \underline{w}^k)}$$

für $k = 1,2,3$ gegeben mit $\underline{f} = (12,12,13)^\top$?