Kapitel 5

Rand– und Eigenwertprobleme

Bei Anfangswertproblemen werden die Bedingungen zur Festlegung der bei der Bestimmung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung auftretenden Konstanten an einer Stelle x_0 formuliert. Betrachtet man stattdessen Bedingungen für unterschiedliche Positionen $x = a$ und $x = b$, so spricht man von einem Randwertproblem. Als einführendes Beispiel betrachten wir eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung,

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (a, b). \tag{5.1}$$

Sei mit u_f eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gegeben, dann lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5.1)

$$u(x) = c_0 + c_1 x + u_f(x)\,, \tag{5.2}$$

und die Konstanten c_0 und c_1 sind aus geeigneten Randbedingungen in $x = a$ und in $x = b$ zu bestimmen. Je nach Gestalt unterscheiden wir in Randbedingungen 1. Art (Dirichlet–Randbedingung),

$$u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b,$$

in Randbedingungen 2. Art (Neumann–Randbedingung),

$$u'(a) = u_a, \quad u'(b) = u_b,$$

oder Randbedingungen 3. Art (Robin–Randbedingung),

$$u'(a) + \alpha_a u(a) = u_a, \quad u'(b) + \alpha_b u(b) = u_b.$$

Die oben genannten Randbedingungen sind Spezialfälle der Sturmschen–Randbedingung

$$\alpha_a u(a) + \beta_a u'(a) = u_a, \quad \alpha_b u(b) + \beta_b u'(b) = u_b, \tag{5.3}$$

wobei

$$\alpha_a^2 + \beta_a^2 > 0, \quad \alpha_b^2 + \beta_b^2 > 0$$

vorausgesetzt wird. Durch Einsetzen der allgemeinen Lösung (5.2) in die Randbedingungen (5.3) ergibt sich ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Konstanten c_0 und c_1,

$$\begin{aligned}\alpha_a\Big[c_0 + c_1 a + u_f(a)\Big] + \beta_a\Big[c_1 + u_f'(a)\Big] &= u_a,\\ \alpha_b\Big[c_0 + c_1 b + u_f(b)\Big] + \beta_b\Big[c_1 + u_f'(b)\Big] &= u_b,\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \alpha_a & \alpha_a a + \beta_a \\ \alpha_b & \alpha_b b + \beta_b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a - \alpha_a u_f(a) - \beta_a u_f'(a) \\ u_b - \alpha_b u_f(b) - \beta_b u_f'(b) \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar für

$$0 \neq \det\begin{pmatrix} \alpha_a & \alpha_a a + \beta_a \\ \alpha_b & \alpha_b b + \beta_b \end{pmatrix} = \alpha_a(\alpha_b b + \beta_b) - \alpha_b(\alpha_a a + \beta_a) = \alpha_a\alpha_b(b-a) + \alpha_a\beta_b - \alpha_b\beta_a.$$

Insbesondere für das Dirichlet–Randwertproblem mit $\alpha_a = \alpha_b = 1$ und $\beta_a = \beta_b = 0$ folgt eindeutige Lösbarkeit, während für das Neumann–Randwertproblem mit $\alpha_a = \alpha_b = 0$ die Lösbarkeit nur unter zusätzlichen Voraussetzungen folgt, und die Lösung, sofern diese existiert, nur bis auf eine additive Konstante eindeutig ist.

Beispiel 5.1. *Für das Randwertproblem*

$$-u''(x) = 1 \quad \textit{für}\, x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

ist

$$u_f(x) = -\frac{1}{2}x^2, \quad u(x) = c_0 + c_1 x - \frac{1}{2}x^2.$$

Aus den Randbedingungen folgt

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{2},$$

und somit die Lösung

$$u(x) = \frac{1}{2}x(1-x)\,.$$

5.1 Greensche Funktion

Betrachtet wird die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung,

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0,1), \tag{5.4}$$

mit homogenen Sturmschen Randbedingungen

$$\alpha_0 u(0) + \beta_0 a(0)u'(0) = 0, \quad \alpha_1 u(1) + \beta_1 a(1)u'(1) = 0, \quad \alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0. \tag{5.5}$$

In (5.4) seien $a(x)$ und $b(x)$ als stetig differenzierbar, und $c(x)$ als stetig vorausgesetzt. Weiter gelte $a(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$. Eine Multiplikation der Differentialgleichung (5.4) mit einer beliebigen stetig differenzierbaren Funktion v, Integration über ein beliebiges Intervall $(a,b) \subset (0,1)$, und partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)v(x)\,dx &= \int_a^b \Big[-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x)\Big]v(x)\,dx \\ &= \int_a^b \Big[a(x)u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\Big]\,dx - a(x)u'(x)v(x)\Big|_a^b,\end{aligned}$$

und somit die erste Greensche Formel

$$a(u,v) = \int_a^b L[u](x)\,v(x)\,dx + a(x)u'(x)v(x)\Big|_a^b \tag{5.6}$$

mit der Bilinearform

$$a(u,v) = \int_a^b \Big[a(x)u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\Big]\,dx,$$

und mit dem Differentialoperator

$$L[u](x) = -(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x).$$

Nochmalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}a(u,v) &= \int_a^b \Big[a(x)u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\Big]\,dx \\ &= [a(x)v'(x) + b(x)v(x)]u(x)\Big|_a^b + \int_a^b u(x)\Big[-(a(x)v'(x))' - (b(x)v(x))' + c(x)v(x)\Big]\,dx \\ &= [a(x)v'(x) + b(x)v(x)]u(x)\Big|_a^b + \int_a^b u(x)\,L^*[v](x)\,dx\end{aligned}$$

mit dem formal adjungierten Operator

$$L^*[v](x) = -(a(x)v'(x))' - (b(x)v(x))' + c(x)v(x).$$

Für $b \equiv 0$ ist $L = L^*$, der Differentialoperator heißt selbstadjungiert. Allgemein gilt die zweite Greensche Formel

$$\begin{aligned}&\int_a^b L[u](x)\,v(x)\,dx + a(x)u'(x)v(x)\Big|_a^b \\ &\qquad = [a(x)v'(x) + b(x)v(x)]u(x)\Big|_a^b + \int_a^b u(x)\,L^*[v](x)\,dx\,.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Insbesondere für $(a,b) = (0,1)$ gilt

$$\int_0^1 \Big[L[u](x)\,v(x) - u(x)\,L^*[v](x)\Big]\,dx = \Big[a(x)(u(x)v'(x) - u'(x)v(x)) + b(x)u(x)v(x)\Big]_0^1.$$

Neben den Randbedingungen (5.5) an u erfülle auch v Randbedingungen,

$$\alpha_0 v(0) + \beta_0[a(0)v'(0) + b(0)v(0)] = 0, \quad \alpha_0 v(1) + \beta_0[a(1)v'(1) + b(1)v(1)] = 0.$$

Für $\beta_0 = 0$ ist nach Voraussetzung $\alpha_0 \neq 0$ und somit folgt $u(0) = v(0) = 0$. Für $\beta_0 \neq 0$ ist

$$u'(0) = -\frac{\alpha_0}{\beta_0}\frac{u(0)}{a(0)}, \quad v'(0) = -\Big[\frac{\alpha_0}{\beta_0} + b(0)\Big]\frac{v(0)}{a(0)}$$

und somit

$$\begin{aligned} &a(0)(u(0)v'(0) - u'(0)v(0)) + b(0)u(0)v(0) \\ &\qquad = a(0)\left(-u(0)\Big[\frac{\alpha_0}{\beta_0} + b(0)\Big]\frac{v(0)}{a(0)} + \frac{\alpha_0}{\beta_0}\frac{u(0)}{a(0)}v(0)\right) + b(0)u(0)v(0) = 0. \end{aligned}$$

Da entsprechendes auch für $x = 1$ gilt, folgt insgesamt

$$\int_0^1 \Big[L[u](x)\,v(x) - u(x)\,L^*[v](x)\Big]\,dx = 0. \tag{5.8}$$

Ziel ist die Herleitung einer Darstellungsformel für die Lösung u des Randwertproblems (5.4) und (5.5). Sei v_1 und v_2 ein Fundamentalsystem des adjungierten Differentialoperators L^*, d.h. für $v = c_1v_1 + c_2v_2$ gilt

$$L^*[v](x) = L^*[c_1v_1 + c_2v_2](x) = c_1L^*[v_1](x) + c_2L^*[v_2](x) = 0 \quad \text{für } x \in (0,1).$$

Für die Lösung u der inhomogenen Differentialgleichung (5.4) folgt dann aus (5.7)

$$[a(y)v'(y) + b(y)v(y)]u(y)\Big|_a^b = \int_a^b f(y)v(y)\,dy + a(y)u'(y)v(y)\Big|_a^b$$

für ein beliebiges Intervall $(a,b) \subset (0,1)$. Sei jetzt $x \in (0,1)$ beliebig aber fest. Dann gilt für die Funktion

$$v(y) = v_0(x,y) = c_1^0(x)v_1(y) + c_2^0(x)v_2(y) \quad \text{für } y \in (0,x),$$

welche die Randbedingung

$$\alpha_0 v_0(x,0) + \beta_0[a(0)v_0'(x,0) + b(0)v_0(x,0)] = 0,$$

erfüllt, die Gleichheit

$$[a(x)v_0'(x,x) + b(x)v_0(x,x)]u(x) = \int_0^x f(y)v_0(x,y)\,dy + a(x)u'(x)v_0(x,x).$$

Entsprechend folgt für die Funktion

$$v(y) = v_1(x,y) = c_1^1(x)v_1(x,y) + c_2^1v_2(x,y) \quad \text{für } y \in (x,1),$$

welche die Randbedingung

$$\alpha_1 v_1(x,1) + \beta_1[a(1)v_1'(x,1) + b(1)v_1(x,1)] = 0$$

erfüllt,

$$-[a(x)v_1'(x,x) + b(x)v_1(x,x)]u(x) = \int_x^1 f(y)v_1(x,y)\,dx - a(x)u'(x)v_1(x,x).$$

Die Summation der beiden Ausdrücke ergibt

$$\Big[a(x)[v_0'(x,x) - v_1'(x,x)] + b(x)[v_0(x,x) - v_1(x,x)]\Big]u(x)$$
$$= \int_0^x f(y)v_0(x,y)\,dy + \int_x^1 f(y)v_1(x,y)\,dy + a(x)u'(x)[v_0(x,x) - v_1(x,x)].$$

Sind die Forderungen

$$v_0(x,x) = v_1(x,x), \quad v_0'(x,x) - v_1'(x,x) = \frac{1}{a(x)},$$

erfüllt, so folgt

$$u(x) = \int_0^x f(y)v_0(x,y)dy + \int_x^1 f(y)v_1(x,y)dy = \int_0^1 G(x,y)f(y)dy \tag{5.9}$$

mit der Greenschen Funktion

$$G(x,y) = \begin{cases} v_0(x,y) & \text{für } y \in (0,x), \\ v_1(x,y) & \text{für } y \in (x,1). \end{cases} \tag{5.10}$$

Beispiel 5.2. *Für das Randwertproblem*

$$-u''(x) = f(x) \quad \textit{für } x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

ist

$$v_1(x) = 1, \quad v_2(x) = x\,.$$

Weiters sind

$$v_0(x,y) = c_1^0(x) + c_2^0(x)\cdot y, \quad v_0(x,0) = c_1^0(x) = 0,$$

und

$$v_1(x,y) = c_1^1(x) + c_2^1(x)\cdot y, \quad v_1(x,1) = c_1^1(x) + c_2^1(x) = 0.$$

Aus der Gleichheit $v_0(x,x) = v_1(x,x)$ *folgt*

$$c_1^0(x) + c_2^0(x)\cdot x = c_1^1(x) + c_2^1(x)\cdot x,$$

während sich aus $v_0'(x,x) - v_1'(x,x) = 1$

$$c_2^0(x) - c_2^1(x) = 1$$

ergibt. Damit folgt

$$c_1^0(x) = 0, \quad c_1^1(x) = -c_2^1(x), \quad c_2^1(x) = c_2^0(x) - 1$$

und somit

$$c_2^0(x) \cdot x = c_2^1(x)(x-1) = (c_2^0(x) - 1)(x-1),$$

d.h.

$$c_2^0(x) = 1 - x, \quad c_2^1(x) = -x, \quad c_1^1(x) = x,$$

bzw.

$$v_0(x,y) = (1-x)y, \quad v_1(x,y) = x - xy = x(1-y)\,.$$

Die Greensche Funktion lautet also

$$G(x,y) = \begin{cases} (1-x)y & \textit{für } y \in (0,x), \\ x(1-y) & \textit{für } y \in (x,1). \end{cases}$$

Für die Lösung des Randwertproblems

$$-u''(x) = 1 \quad \textit{für } x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

ist also

$$\begin{aligned} u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y) dy &= \int_0^x (1-x)y\,dy + \int_x^1 x(1-y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}(1-x)x^2 + \frac{1}{2}x(1-x)^2 = \frac{1}{2}x(1-x)\,. \end{aligned}$$

Die Darstellungsformel (5.9) berücksichtigt in der Konstruktion der Greenschen Funktion (5.10) die homogenen Randbedingungen (5.5). Im folgenden soll ein anderer Zugang zur Darstellung einer Lösung der Differentialgleichung (5.4) betrachtet werden, der keine Randbedingungen an die zu bestimmende Funktion v stellt. Der Einfachheit halber betrachten wir wieder das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0 \tag{5.11}$$

mit der zugehörigen zweiten Greensche Formel

$$\int_a^b f(y)v(y)\,dy + u'(y)v(y)\Big|_a^b = v'(y)u(y)\Big|_a^b + \int_a^b u(y)[-v''(y)]\,dy\,.$$

Dabei ist $(a,b) \subseteq (0,1)$ beliebig. Sei $x \in (a,b)$ beliebig aber fest. Für $(a,b) = (0,x)$ und $v(y) = x - y$ folgt dann

$$\int_0^x f(y)(x-y)\,dy - xu'(0) = -u(x),$$

bzw. ergibt sich für $(a, b) = (x, 1)$ und $v(y) = y - x$

$$\int_x^1 f(y)(y-x)\,dy + u'(1)(1-x) = -u(x).$$

Summation ergibt die Darstellungsformel

$$u(x) = -\frac{1}{2}\int_0^1 f(y)|x-y|\,dy + \frac{1}{2}xu'(0) - \frac{1}{2}u'(1)(1-x) \quad \text{für } x \in (0,1).$$

Die Lösung des Randwertproblems (5.11) kann also beschrieben werden, sobald die Ableitungen $u'(0)$ und $u'(1)$ bekannt sind. Für $x \to 0$ folgt aus der Randbedingung $u(0) = 0$

$$u'(1) = -\int_0^1 f(y)y\,dy,$$

während für $x \to 1$ und $u(1) = 0$

$$u'(0) = \int_0^1 f(y)(1-y)\,dy$$

folgt. Damit ergibt sich für $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
u(x) &= -\frac{1}{2}\int_0^1 f(y)|x-y|\,dy + \frac{1}{2}xu'(0) - \frac{1}{2}u'(1)(1-x)\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 f(y)|x-y|\,dy + \frac{1}{2}\int_0^1 f(y)x(1-y)\,dy + \frac{1}{2}\int_0^1 f(y)y(1-x)\,dy\\
&= \frac{1}{2}\int_0^x f(y)\Big[x(1-y) + y(1-x) - (x-y)\Big]dy\\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_x^1 f(y)\Big[x(1-y) + y(1-x) - (y-x)\Big]dy\\
&= \int_0^x f(y)y(1-x)dy + \int_x^1 f(y)x(1-y)dy\\
&= \int_0^1 G(x,y)f(y)dy
\end{aligned}$$

mit der bereits bestimmten Greenschen Funktion. Die Funktion

$$U^*(x,y) = -\frac{1}{2}|x-y| \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R} \tag{5.12}$$

wird als Fundamentallösung des formal adjungierten Differentialoperators $L^*[u] = -u''$ bezeichnet, für $y \neq x$ ist diese Lösung der homogenen Differentialgleichung und es gilt

$$\int_0^1 u(y)\, L_y^*[U^*](x,y)dy = u(x) \quad \text{für } x \in (0,1).$$

Ist für das lineare Randwertproblem (5.4) und (5.5) die Greensche Funktion $G(x,y)$ bekannt, d.h.

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)\,dy \quad \text{für } x \in (0,1)$$

ist Lösung des Randwertproblems, so kann dann auch die Lösbarkeit der nichtlinearen Differentialgleichung

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x,u(x)) \quad \text{für } x \in (0,1) \tag{5.13}$$

mit homogenen Randbedingungen (5.5) untersucht werden. u ist genau dann eine Lösung des nichtlinearen Randwertproblems (5.13) und (5.5), wenn u in $(0,1)$ stetig ist und der Integralgleichung

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y,u(y))\,dy \quad \text{für } x \in (0,1) \tag{5.14}$$

genügt. Dabei ist $G(x,y)$ die Greensche Funktion des linearen Randwertproblems (5.4) und (5.5). Zu untersuchen bleibt somit die Lösbarkeit der nichtlinearen Integralgleichung (5.14). Hinreichend für den Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit der Integralgleichung (5.14) ist der Nachweis der Kontraktionseigenschaft von

$$T[u](x) := \int_0^1 G(x,y)f(y,u(y))\,dy \quad \text{für } x \in (0,1)$$

im Raum $C([0,1])$ der in $[0,1]$ stetigen Funkionen, welche die Randbedingungen (5.5) erfüllen.

Als Beispiel betrachten wir das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x,u(x)) \quad \text{für } x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

und die Integralgleichung

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y,u(y))\,dy \quad \text{für } x \in (0,1)$$

mit der Greenschen Funktion

$$G(x,y) = \begin{cases} (1-x)y & \text{für } y \in (0,x), \\ x(1-y) & \text{für } y \in (x,1). \end{cases}$$

Ist $f(x,u)$ Lipschitz–stetig, d.h. es gilt

$$|f(x,v_1) - f(x,v_2)| \le L\,|v_1 - v_2| \quad \text{für alle } x \in (0,1), \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R},$$

so folgt, die Greensche Funktion ist nichtnegativ,

$$
\begin{aligned}
\|T[u]-T[v]\|_{C([0,1])} &= \max_{x\in[0,1]} \Big|T[u](x)-T[v](x)\Big| \\
&\leq \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 G(x,y)\Big|f(y,u(y))-f(y,v(y)\Big|\,dy \\
&\leq \max_{y\in[0,1]} \Big|f(y,u(y))-f(y,v(y))\Big| \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 G(x,y)\,dy \\
&\leq L \max_{y\in[0,1]} |u(y)-v(y)| \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 G(x,y)\,dy.
\end{aligned}
$$

Es ist

$$\max_{x\in[0,1]} \int_0^1 G(x,y)\,dy = \max_{x\in[0,1]} \frac{1}{2}x(1-x) = \frac{1}{8},$$

und somit folgt

$$\|T[u]-T[v]\|_{C([0,1])} \leq \frac{1}{8}L\,\|u-v\|_{C([0,1])} \quad \text{für alle } u,v\in C([0,1]).$$

Ist $f(\cdot,\cdot)$ Lipschitz–stetig mit $L<8$, so ist $T: C([0,1])\to C([0,1])$ Kontraktion, und die Methode der sukzessiven Approximation

$$u^{n+1}(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y,u^n(y))\,dy \quad \text{für } x\in(0,1)$$

konvergiert gegen die Lösung des nichtlinearen Randwertproblems (5.13) und (5.5).

5.2 Sturm–Liouvillesches Eigenwertproblem

Betrachtet wird ein homogenes Randwertproblem für einen selbstadjungierten Differentialoperator,

$$-(a(x)u'(x))' + c(x)u(x) = \lambda u(x) \quad \text{für } x\in(0,1), \tag{5.15}$$

$$\alpha_0 u(0)+\beta_0 a(0)u'(0)=0, \quad \alpha_1 u(1)+\beta_1 a(1)u'(1)=0, \quad \alpha_i^2+\beta_i^2>0, \tag{5.16}$$

welches zusätzlich von einem skalaren Parameter λ abhängt. Gesucht sind diejenigen Werte von λ, für welche das homogene Randwertproblem (5.15) und (5.16) neben der trivialen Lösung auch nicht–triviale Lösungen besitzt. In diesem Fall wird λ als ein Eigenwert des Randwertproblems, und u als die zugehörige Eigenfunktion bezeichnet. Offensichtlich sind die Eigenfunktionen nur bis auf einen multiplikativen Faktor bestimmt.

Beispiel 5.3. *Als erstes Beispiel betrachten wir das Dirichlet–Eigenwertproblem des Laplace–Operators,*

$$-u''(x) = \lambda u(x) \quad \textit{für } x\in(0,1), \quad u(0)=u(1)=0.$$

Für $\lambda = 0$ ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$-u''(x) = 0 \quad \textit{für}\, x \in (0,1)$$

gegeben durch

$$u(x) = c_0 + c_1 x.$$

Aus den Randbedingungen

$$u(0) = c_0 = 0, \quad u(1) = c_0 + c_1 = 0$$

folgt dann aber nur die triviale Lösung $u(x) \equiv 0$.

Für $\lambda = -\alpha^2 < 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, lautet die zu lösende Differentialgleichung

$$\alpha^2 u(x) - u''(x) = 0 \quad \textit{für}\, x \in (0,1),$$

mit der allgemeinen Lösung

$$u(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}.$$

Aus den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ folgt wieder nur die triviale Lösung $u \equiv 0$.

Für $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ist schließlich

$$u''(x) + \alpha^2 u(x) = 0 \quad \textit{für}\, x \in (0,1),$$

mit der allgemeinen Lösung

$$u(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x\,.$$

Aus der Randbedingung $u(0) = 0$ folgt zunächst $A = 0$, aus der Randbedingung $u(1) = 0$ folgt

$$B \sin \alpha = 0\,.$$

Für die Existenz nicht–trivialer Lösungen muß $B \neq 0$ gelten, d.h.

$$\sin \alpha = 0, \quad \alpha = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Damit erhalten wir für die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenfunktionen

$$\lambda_k = (k\pi)^2, \quad u_k(x) = \sin k\pi x \quad \textit{für}\, k \in \mathbb{N}.$$

Es gibt also abzählbar viele einfache Eigenwerte λ_k, welche für $k \to \infty$ gegen unendlich streben, und die Eigenfunktionen bilden ein Orthogonalsystem: Mit dem Additionstheorem

$$\sin \alpha \, \sin \beta = \frac{1}{2}\Big[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\Big]$$

gilt für $k \neq \ell$

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_k(x) u_\ell(x)\, dx &= \int_0^1 \sin k\pi x \, \sin \ell\pi x \, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\cos(k-\ell)\pi x - \cos(k+\ell)\pi x\Big]\, dx = 0.\end{aligned}$$

Für $k = \ell$ ist entsprechend

$$\int_0^1 [u_k(x)]^2\,dx = \int_0^1 \sin^2 k\pi x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[1 - \cos 2k\pi x\Big]\,dx = \frac{1}{2}\,.$$

Betrachtet man jetzt das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x) \quad \textit{für}\; x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

so führt der Ansatz

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x)$$

auf

$$f(x) = -u''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k[-u_k''(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k u_k(x),$$

d.h.

$$\int_0^1 f(x)u_\ell(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\lambda_k \int_0^1 u_k(x)u_\ell(x)\,dx = \frac{1}{2}a_\ell\lambda_\ell,$$

bzw.

$$a_\ell = \frac{2}{\lambda_\ell}\int_0^1 f(x)u_\ell(x)\,dx.$$

Ausgehend von Beispiel 5.3 stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen Aussagen über die Existenz, Anzahl und Verteilung von Eigenwerten getroffen werden können, und wann man Lösungen von Randwertproblemen in eine Reihe nach den Eigenfunktionen entwickeln kann.

Satz 5.1. *Gegeben sei das Sturm–Liouville Eigenwertproblem*

$$-(a(x)u'(x))' + c(x)u(x) = \lambda u(x) \quad \textit{für}\; x \in (0,1),$$

$$\alpha_0 u(0) + \beta_0 a(0)u'(0) = 0, \quad \alpha_1 u(1) + \beta_1 a(1)u'(1) = 0, \quad \alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0.$$

Dabei sei $a(x) > 0$ in $[0,1]$ stetig differenzierbar, und $c(x)$ sei in $[0,1]$ stetig. Dann besitzt das Eigenwertproblem unendlich viele reelle Eigenwerte

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty \quad \textit{für}\; n \to \infty.$$

Die zum Eigenwert λ_n gehörende Eigenfunktion u_n hat im Intervall $(0,1)$ genau n Nullstellen. Zwischen zwei Nullstellen von u_n liegt genau eine Nullstelle von u_{n+1}. Die Eigenfunktionen lassen sich so normieren, daß sie ein Orthonormalsystem bilden,

$$\int_0^1 u_n(x)u_m(x)\,dx = \delta_{mn}.$$

Jede in $[0,1]$ *stetig differenzierbare Funktion* u*, welche die Randbedingungen erfüllt, läßt sich in eine absolut und gleichmässig konvergente Fourierreihe entwickeln,*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x), \quad a_n = \int_0^1 u(x) u_n(x)\, dx.$$

Der Beweis von Satz 5.1 kann auf unterschiedlichen Wegen geführt werden. Zur Lösung der Differentialgleichung

$$-(a(x)u'(x))' + c(x)u(x) = \lambda u(x)$$

betrachten wir die Substitution

$$y_1(x) := u(x), \quad y_2(x) := a(x)u'(x), \tag{5.17}$$

und wir erhalten ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$y_1'(x) = \frac{y_2(x)}{a(x)}, \quad y_2'(x) = [c(x) - \lambda] y_1(x)\,. \tag{5.18}$$

Jede Lösung des Differentialgleichungssystems (5.18) erlaubt eine Darstellung als Kurve $(y_2(x), y_1(x))$ im Phasenraum, in Polarkoordinaten ist

$$y_1(x) = r(x)\sin\varphi(x), \quad y_2(x) = r(x)\cos\varphi(x). \tag{5.19}$$

Mit

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= r'(x)\sin\varphi(x) + r(x)\varphi'(x)\cos\varphi(x), \\ y_2'(x) &= r'(x)\cos\varphi(x) - r(x)\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{aligned}$$

folgt

$$y_1'(x)\cos\varphi(x) - y_2'(x)\sin\varphi(x) = r(x)\varphi'(x)\,.$$

Andererseits ist

$$y_1'(x) = \frac{y_2(x)}{a(x)} = \frac{r(x)}{a(x)}\cos\varphi(x)$$

bzw.

$$y_2'(x) = [c(x) - \lambda] y_1(x) = [c(x) - \lambda] r(x) \sin\varphi(x)\,.$$

Daher folgt

$$r(x)\varphi'(x) = \frac{r(x)}{a(x)}\cos\varphi(x) - [c(x) - \lambda] r(x)\sin^2\varphi(x),$$

bzw.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{a(x)}\cos\varphi(x) - [c(x) - \lambda]\sin^2\varphi(x). \tag{5.20}$$

Wir haben also die Lösung des Eigenwertproblems (5.15) und (5.16) zurückgeführt auf die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung.

Entsprechend folgt mit

$$
\begin{aligned}
r'(x) &= y_1'(x)\sin\varphi(x) + y_2'(x)\cos\varphi(x) \\
&= \frac{r(x)}{a(x)}\cos\varphi(x)\sin\varphi(x) + [c(x)-\lambda]r(x)\sin\varphi(x)\cos\varphi(x) \\
&= \left[\frac{1}{a(x)} + c(x) - \lambda\right] r(x)\cos\varphi(x)\sin\varphi(x)
\end{aligned}
$$

eine Differentialgleichung zur Bestimmung von $r(x)$.

Diese Umformung (5.17) der Differentialgleichung (5.15) wird als Prüfer–Transformation bezeichnet. Die Eigenschaften einer Eigenlösung u ergeben sich wegen

$$y_1(x) = u(x) = r(x)\sin\varphi(x)$$

aus den Eigenschaften der Funktion $\varphi(x)$.

Sei $u(x,\lambda)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$-(a(x)u'(x,\lambda))' + c(x)u(x,\lambda) = \lambda u(x,\lambda),$$

mit, durch eine entsprechende Skalierung,

$$u(0,\lambda) = \sin\alpha, \quad a(0)u'(0,\lambda) = \cos\alpha, \quad \alpha \in [0,\pi).$$

Sei

$$\varphi(x,\lambda) = \arctan\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \arctan\frac{u(x,\lambda)}{a(x)u'(x)}$$

die durch die Prüfer–Transformation bestimmte Funktion mit

$$\varphi(0,\lambda) = \arctan\frac{u(0)}{a(0)u'(0)} = \arctan\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \alpha.$$

Diese ist Lösung der Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
\varphi'(x,\lambda) &= \frac{\cos\varphi(x,\lambda)}{a(x)} + [\lambda - c(x)]\sin^2\varphi(x,\lambda) \\
&= \frac{1}{a(x)} + \left[\lambda - \frac{1}{a(x)} - c(x)\right]\sin^2\varphi(x,\lambda)\,,
\end{aligned}
$$

bzw. des Anfangswertproblems

$$\varphi'(x,\lambda) = \frac{1}{a(x)} + \left[\lambda - \frac{1}{a(x)} - c(x)\right]\sin^2\varphi(x,\lambda)\,, \quad \varphi(0,\lambda) = \alpha. \tag{5.21}$$

Aus dem Anfangswertproblem (5.21) lassen sich nun verschiedene Eigenschaften der Funktion $\varphi(x,\lambda)$, und somit der Eigenfunktion $u(x,\lambda)$ ablesen.

Folgerung 5.1. *Aus $\varphi(x_0,\lambda)=k\pi$ folgt*

$$\varphi'(x_0,\lambda)=\frac{1}{a(x_0)}>0,$$

d.h. die Kurve $y=\varphi(x,\lambda)$ schneidet die Gerade $y=k\pi$ höchstens einmal, von unten nach oben. Insbesondere für $k=0$ folgt

$$\varphi(x,\lambda)>0 \quad \textit{für } x\in(0,1], \lambda\in\mathbb{R}.$$

Lemma 5.1. *Es gilt*

$$\varphi_\lambda(x,\lambda)>0 \quad \textit{für } x\in(0,1], \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Beweis: Die Differentiation der Differentialgleichung

$$\varphi'(x,\lambda)=\frac{1}{a(x)}+\Big[\lambda-\frac{1}{a(x)}-c(x)\Big]\sin^2\varphi(x,\lambda)$$

nach λ ergibt

$$\frac{d}{dx}\varphi_\lambda(x,\lambda)=\sin^2\varphi(x,\lambda)+\Big[\lambda-\frac{1}{a(x)}-c(x)\Big]2\sin\varphi(x,\lambda)\cos\varphi(x,\lambda)\varphi_\lambda(x,\lambda),$$

die Funktion $\varphi_\lambda(x,\lambda)$ genügt also der Differentialgleichung

$$\varphi_\lambda'(x,\lambda)=p(x)\varphi_\lambda(x,\lambda)+q(x)$$

mit

$$p(x)=\Big[\lambda-\frac{1}{a(x)}-c(x)\Big]2\sin\varphi(x,\lambda)\cos\varphi(x,\lambda), \quad q(x)=\sin^2\varphi(x,\lambda).$$

Wegen $\varphi(0,\lambda)=\alpha$ folgt die Anfangsbedingung

$$\varphi_\lambda(0,\lambda)=0.$$

Mit der Stammfunktion

$$P(x)=\int_0^x p(s)\,ds$$

folgt durch Trennung der Veränderlichen und Variation der Konstanten

$$\varphi_\lambda(x,\lambda)=\int_0^x e^{P(x)-P(s)}q(s)\,ds,$$

und wegen

$$q(s)=\sin^2\varphi(s,\lambda)>0,$$

mit Ausnahme endlich vieler Stellen, folgt schließlich

$$\varphi_\lambda(x,\lambda)>0 \quad \text{für } x\in(0,1].$$

■

Lemma 5.2. *Es gilt*

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \varphi(1,\lambda) = 0\,.$$

Beweis: $\varphi(x,\lambda)$ ist Lösung des Anfangswertproblems

$$\varphi'(x,\lambda) = \frac{1}{a(x)} + \left[\lambda - \frac{1}{a(x)} - c(x)\right] \sin^2\varphi(x,\lambda) =: f(x,\varphi(x,\lambda))\,, \quad \varphi(0,\lambda) = \alpha.$$

Sei $\psi(x)$ eine in $[0,1]$ stetig differenzierbare Funktion mit

$$\psi'(x) > f(x,\psi(x)) \quad \text{für } x \in (0,1], \quad \psi(x) > \alpha.$$

Wir zeigen zunächst, daß dann

$$\varphi(x,\lambda) < \psi(x) \quad \text{für } x \in [0,1]$$

gilt, d.h. $\psi(x)$ ist eine Oberfunktion zu $\varphi(x,\lambda)$: Existiert ein $x_0 \in (0,1]$ mit

$$\varphi(x_0,\lambda) = \psi(x_0),$$

so folgt für die Differenz

$$z(x) := \psi(x) - \varphi(x,\lambda), \quad z(0) = \psi(0) - \varphi(0,\lambda) > 0, \quad z(x_0) = 0,$$

die Beziehung

$$z'(x_0) = \psi'(x_0) - \varphi'(x_0,\lambda) > f(x_0,\psi(x_0)) - f(x_0,\varphi(x_0,\lambda)) = 0,$$

d.h. $z(x) < 0$ für $x < x_0$ im Widerspruch zu $z(0) > 0$.

Für $\alpha \in [0,\pi)$ und $\varepsilon \in (0,\pi-\alpha)$ sei

$$\psi(x) = (2\varepsilon - \pi)x + \pi - \varepsilon, \quad \psi(0) = \pi - \varepsilon > \alpha, \quad \psi(1) = \varepsilon.$$

Dann ist, für $0 > \lambda \to -\infty$,

$$\begin{aligned} f(x,\psi(x)) &= \frac{1}{a(x)} + \left[\lambda - \frac{1}{a(x)} - c(x)\right] \sin^2\psi(x) \\ &\le \frac{1}{a(x)} + \left[\lambda - \frac{1}{a(x)} - c(x)\right] \sin^2\varepsilon^2 \\ &< 2\varepsilon - \pi = \psi'(x), \end{aligned}$$

d.h. es folgt

$$\varphi(x,\lambda) < \psi(x) \quad \text{für } x \in [0,1], \quad \varphi(1,\lambda) < \varepsilon.$$

■

Lemma 5.3. *Es existieren positive Konstanten* γ_1, γ_2 *und* λ_0 *mit*

$$\gamma_1\sqrt{\lambda} \le \varphi(1,\lambda) \le \gamma_2\sqrt{\lambda} \quad \textit{für } \lambda \ge \lambda_0.$$

Beweis: Es existieren Konstanten A_1, B_1 und A_2, B_2, so daß für große λ

$$A_1 + \lambda B_1 \sin^2\varphi(x,\lambda) \le \frac{1}{a(x)} + \left[\lambda - \frac{1}{a(x)} - c(x)\right]\sin^2\varphi(x,\lambda) \le A_2 + \lambda B_2 \sin^2\varphi(x,\lambda)$$

für alle $x \in [0,1]$ gilt, bzw.

$$\frac{\varphi'(x,\lambda)}{A_2 + \lambda B_2\sin^2\varphi(x,\lambda)} \le 1 \le \frac{\varphi'(x,\lambda)}{A_1 + \lambda B_1\sin^2\varphi(x,\lambda)} \quad \text{für } x \in [0,1].$$

Integration ergibt

$$\int_0^1 \frac{\varphi'(x,\lambda)}{A_2 + \lambda B_2\sin^2\varphi(x,\lambda)}dx \le 1 \le \int_0^1 \frac{\varphi'(x,\lambda)}{A_1 + \lambda B_1\sin^2\varphi(x,\lambda)}dx,$$

bzw. mit der Substitution $s = \varphi(x,\lambda)$

$$\int_\alpha^{\varphi(1,\lambda)} \frac{ds}{A_2 + \lambda B_2\sin^2 s} \le 1 \le \int_\alpha^{\varphi(1,\lambda)} \frac{ds}{A_1 + \lambda B_1\sin^2 s}.$$

Es sei $k \in \mathbb{N}$ mit

$$k\pi \le \varphi(1,\lambda) < (k+1)\pi.$$

Wegen $\alpha < \pi$ folgt dann, unter Ausnutzung der Periodizität,

$$\begin{aligned}
1 &\ge \int_\alpha^{\varphi(1,\lambda)} \frac{ds}{A_2 + \lambda B_2\sin^2 s} \ge \int_\pi^{k\pi} \frac{ds}{A_2 + \lambda B_2\sin^2 s} \\
&= (k-1)\int_0^\pi \frac{ds}{A_2 + \lambda B_2\sin^2 s} \ge (k-1)\int_0^\pi \frac{ds}{A_2 + \lambda B_2 s^2} \\
&= (k-1)\sqrt{\frac{A_2}{\lambda B_2}}\arctan\sqrt{\frac{\lambda B_2}{A_2}}s\,\Big|_0^\pi = c\,(k-1)\,\frac{1}{\sqrt{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sqrt{\lambda} \ge c(k-1) = \frac{c}{\pi}((k+1)\pi - 2\pi) > \frac{c}{\pi}(\varphi(1,\lambda) - 2\pi)$$

und somit

$$\varphi(1,\lambda) < \frac{\pi}{c}\sqrt{\lambda} + 2\pi \le \gamma_2\sqrt{\lambda}$$

für hinreichend große λ . Andererseits ist, mit $\frac{1}{2}s \le \sin s$ für $s \in (0,\pi/2)$,

$$\begin{aligned}
1 &\le \int_\alpha^{\varphi(1,\lambda)} \frac{ds}{A_1 + \lambda B_1\sin^2 s} \le \int_0^{(k+1)\pi} \frac{ds}{A_1 + \lambda B_1\sin^2 s} \\
&= 2(k+1)\int_0^{\pi/2} \frac{ds}{A_1 + \lambda B_1\sin^2 s} \le 2(k+1)\int_0^{\pi/2} \frac{ds}{A_1 + \lambda B_1\frac{1}{4}s^2} \\
&= 2(k+1)\sqrt{\frac{4A_1}{\lambda B_1}}\arctan\sqrt{\frac{\lambda B_1}{4A_1}}s\,\Big|_0^{\pi/2} = c(k+1)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sqrt{\lambda} \leq c(k+1) = \frac{2c}{\pi}k\pi \leq \frac{2c}{\pi}\varphi(1,\lambda) = \frac{1}{\gamma_1}\varphi(1,\lambda).$$

∎

Sei $u(x,\lambda)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$-(a(x)u'(x,\lambda))' + c(x)u(x,\lambda) = \lambda u(x,\lambda)$$

mit den Anfangswerten

$$u(0,\lambda) = \sin\alpha, \quad a(0)u'(0,\lambda) = \cos\alpha, \quad \alpha \in [0,\pi).$$

Dieses $\alpha \in [0,\pi)$ kann nun so gewählt werden, so daß die Vektoren

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ a(0)u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

orthogonal zueinander sind, d.h.

$$\alpha_0 \sin\alpha + \beta_0 \cos\alpha = 0\,.$$

Für dieses $\alpha \in [0,\pi)$ folgt dann

$$0 = \alpha_0 \sin\alpha + \beta_0 \cos\alpha = \alpha_0 u(0) + \beta_0 a(0)u'(0),$$

d.h. die erste Randbedingung des Sturm–Liouville Eigenwertproblems. Zu erfüllen bleibt die zweite Randbedingung

$$\alpha_1 u(1) + \beta_1 a(1)u'(1) = 0\,.$$

Sei

$$\varphi(x,\lambda) = \arctan\frac{u(x,\lambda)}{a(x)u'(x,\lambda)}, \quad \varphi(0,\lambda) = \alpha$$

die durch die Prüfer–Transformation bestimmte Funktion mit

$$u(x,\lambda) = r(x,\lambda)\sin\varphi(x,\lambda), \quad a(x)u'(x,\lambda) = r(x,\lambda)\cos\varphi(x,\lambda)\,.$$

Dann folgt

$$0 = \alpha_1 u(1) + \beta_1 a(1)u'(1) = r(1,\lambda)\Big[\alpha_1 \sin\varphi(1,\lambda) + \beta_1 \cos\varphi(1,\lambda)\Big]\,.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn für ein $\beta \in (0,\pi]$ gilt

$$\varphi(1,\lambda) = \beta + n\pi, \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Man beachte $\varphi(x,\lambda) > 0$ für $x \in (0,1]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Da $\varphi(x, \lambda)$ für jedes $x \in (0, 1]$ in λ streng monoton wachsend ist, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ genau ein $\lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(1, \lambda_n) = \beta + n\pi\,.$$

Diese λ_n sind die gesuchten Eigenwerte, und $u_n(x) := u(x, \lambda_n)$ sind die zugehörigen Eigenfunktionen. Aus den Abschätzungen

$$\gamma_1\sqrt{\lambda} \le \varphi(1, \lambda) \le \gamma_2\sqrt{\lambda}$$

für hinreichend grosse $\lambda \ge \lambda_0$ folgt dann

$$\gamma_1^2\lambda_n \le [\varphi(1, \lambda_n)]^2 = [\beta + n\pi]^2 \le \gamma_2^2\lambda_n,$$

und somit

$$c_1\, n^2 \le \lambda_n \le c_2\, n^2 \quad \text{für grosse } n\,.$$

Für die Nullstellen der Eigenfunktion $u_n(x)$ ist

$$u_n(x) = r(x, \lambda_n) \sin\varphi(x, \lambda_n) = 0,$$

d.h.

$$\varphi(x, \lambda_n) = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Andererseits ist

$$0 \le \varphi(0, \lambda_n) = \alpha < \pi, \quad n\pi < \varphi(1, \lambda_n) = n\pi + \beta \le (n+1)\pi,$$

nach Folgerung 5.1 nimmt $\varphi(x, \lambda_n)$ für $k = 1, \ldots, n$ den Wert $k\pi$ genau einmal an, u_n hat also genau n Nullstellen.

Für den Beweis der Aussage der Lage von Nullstellen zweier aufeinander folgender Nullstellen soll hier verzichtet werden, für den Beweis der Orthogonalität der Eigenfunktionen betrachten wir einen anderen Zugang, der im folgenden kurz skizziert werden soll.

5.3 Variationsmethoden für Randwertprobleme

Als Modellbeispiel betrachten wir die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1)$$

mit den Randbedingungen

$$\alpha_0 u(0) + \beta_0 a(0)u'(0) = u_0, \quad \alpha_1 u(1) + \beta_1 a(1)u'(1) = u_1.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzen wir $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$ für $i = 0, 1$ voraus. Die Multiplikation der Differentialgleichung mit einer geeignet gewählten Testfunktion v, Integration über $(0, 1$, und partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)v(x)dx &= \int_0^1 \Big[-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x)\Big] v(x)dx \\ &= \int_0^1 \Big[a(x)u'(x)v'(x)dx + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\Big] dx + a(x)u'(x)v(x)\Big|_0^1 .\end{aligned}$$

Für $\beta_i \neq 0$, $i = 0, 1$, können die Randbedingungen nach der Konormalenableitung aufgelöst werden,

$$a(0)u'(0) = \frac{1}{\beta_0}\Big[u_0 - \alpha_0 u(0)\Big], \quad a(1)u'(1) = \frac{1}{\beta_1}\Big[u_1 - \alpha_1 u(1)\Big].$$

Durch Einsetzen folgt also

$$\int_0^1 \Big[a(x)u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\Big]dx - \frac{\alpha_1}{\beta_1}u(1)v(1) + \frac{\alpha_0}{\beta_0}u(0)v(0)$$
$$= \int_0^1 f(x)v(x)dx - \frac{1}{\beta_1}u_1 v(1) + \frac{1}{\beta_0}u_0 v(0)$$

Jede Lösung des Randwertproblems erfüllt diese Variationsformulierung für geeignet gewählte Testfunktionen. Wir haben gesehen, dass für $\beta_i \neq 0$ die Randbedingung in der Variationsformulierung berücksichtigt werden konnte. Daher werden Neumann– oder Robin–Randbedingungen auch als natürliche Randbedingungen bezeichnet. Im Gegensatz hierzu sind Dirichlet–Randbedingungen $u(0) = u_0$ bzw. $u(1) = u_1$ explizit zu fordern, daher werden diese auch als wesentliche Randbedingungen bezeichnet.

Allgemein können wir das Variationsproblem schreiben als: Gesucht ist $u \in V$ so dass

$$a(u, v) = F(v) \quad \text{für alle } v \in V$$

erfüllt ist. Dabei ist

$$F(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx - \frac{1}{\beta_1}u_1 v(1) + \frac{1}{\beta_0}u_0 v(0)$$

eine Linearform, welche jeder Funktion $v \in V$ einen Wert $F(v) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Entsprechend definiert

$$a(u, v) := \int_0^1 \Big[a(x)u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\Big]dx - \frac{\alpha_1}{\beta_1}u(1)v(1) + \frac{\alpha_0}{\beta_0}u(0)v(0)$$

für $u, v \in V$ eine Bilinearform. Wesentlich für die weiteren Betrachtungen ist die folgende Voraussetzung:

Voraussetzung 5.1. *Für alle $v \in V$, $v \not\equiv 0$, gelte*

$$a(v, v) = \int_0^1 \Big[a(x)[v'(x)]^2 + b(x)v'(x)v(x) + c(x)[v(x)]^2\Big]dx - \frac{\alpha_1}{\beta_1}[v(1)]^2 + \frac{\alpha_0}{\beta_0}[v(0)]^2 > 0$$

Diese Voraussetzung ist zum Beispiel unter den folgenden Bedingungen an die im Randwertproblem auftretenden Koeffizienten erfüllt:

$$a(x) > 0, \quad b(x) = 0, \quad c(x) > 0, \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} \leq 0, \quad \frac{\alpha_0}{\beta_0} \geq 0$$

Für diese Wahl an Koeffizienten folgt auch die Symmetrie der Bilinearform $a(u,v)$, d.h. es gilt

$$a(u,v) = a(v,u) \quad \text{für alle } u,v \in V.$$

Definieren wir das Funktional

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - F(v),$$

so gilt:

Satz 5.2. *Sei $u \in V$ Lösung des Variationsproblems. Dann gilt*

$$J(u) \leq J(v) \quad \textit{für alle } v \in V.$$

Beweis: Für $v = u + tw$, $w \in V$, $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} J(v) = J(u+tw) &= \frac{1}{2}a(u+tw, u+tw) - F(u+tw) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) - F(u) + t\Big[a(u,w) - F(w)\Big] + \frac{1}{2}a(w,w) \\ &\geq \frac{1}{2}a(u,u) - F(u) = J(u) \end{aligned}$$

■

Die Lösung des Variationsproblems ist tatsächlich äquivalent zur Lösung von

$$J(u) = \inf_{v \in V} J(v).$$

Es stellt sich die Frage, wie der Funktionenraum V zu definieren ist, so daß das Infimum $J(u)$ für $u \in V$ angenommen wird. Eine Lösung $u \in C^2((0,1)) \cap C^1([0,1])$ des Randwertproblems heißt klassische Lösung, dabei ist $a \in C^1((0,1)) \cap C([0,1])$, und $b, c, f \in C((0,1))$ vorauszusetzen. Jede klassische Lösung ist offenbar auch Lösung der Variationsformulierung, sofern die Testfunktionen geeignet gewählt werden.

Beispiel 5.4. *Für das Funktional*

$$J(v) := \frac{1}{2}\int_0^1 [v'(x)]^2\,dx - \int_0^{1/2} v(x)\,dx + \int_{1/2}^1 v(x)\,dx \tag{5.22}$$

betrachten wir die für $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ durch

$$u_\varepsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x^2 & \textit{für } x \in [0, \frac{1}{2} - \varepsilon], \\ (-\frac{1}{4} + \frac{3\varepsilon}{16})(x - \frac{1}{2}) + \frac{3}{8\varepsilon}(x - \frac{1}{2})^3 - \frac{1}{16\varepsilon^3}(x - \frac{1}{2})^5 & \textit{für } x \in [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon], \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} & \textit{für } x \in [\frac{1}{2} + \varepsilon, 1] \end{cases}$$

definierte Funktionenfolge. Für diese ist

$$J(u_\varepsilon) = -\frac{1}{96} + \frac{17}{5040}\varepsilon^3, \qquad \inf_{\varepsilon>0} J(u_\varepsilon) = -\frac{1}{96}\,.$$

Während für $\varepsilon > 0$ *alle Funktionen* u_ε *im Intervall* $[0,1]$ *zweimal stetig differenzierbar sind, ist die Grenzfunktion*

$$u(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x^2 & \textit{für } x \in [0, \frac{1}{2} - \varepsilon], \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} & \textit{für } x \in [\frac{1}{2} + \varepsilon, 1] \end{cases}$$

im Intervall $[0,1]$ *nur einmal stetig differenzierbar,*

$$-u''(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1 & \textit{für } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Das in (5.22) *definierte Funktional nimmt also das Infimum über der Menge der im Intervall* $[0,1]$ *zweimal stetig differenzierbaren Funktionen nicht an. Daher ist der Funktionenraum* V *so zu wählen, so dass das Infimum in* V *auch angenommen wird.*

Beispiel 5.4 motiviert die Definition des Sobolev–Raumes

$$W_2^1((0,1)) := \Big\{ v \in L_2((0,1)) : v' \in L_2((0,1)) \Big\}$$

aller im Intervall $(0,1)$ quadrat–integrierbaren Funktionen, deren Ableitung ebenfalls quadrat–integrierbar ist. Eine zugehörige Norm ist gegeben durch

$$\|v\|^2_{W_2^1((0,1))} := \int_0^1 |v(x)|^2\,dx + \int_0^1 |v'(x)|^2\,dx\,.$$