Kapitel 2

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Betrachtet wird eine explizit gegebene Differentialgleichung erster Ordnung,

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{für } x \in [a, b]. \tag{2.1}$$

Dabei sei die reellwertige Funktion $f(x, y)$ für $(x, y) \in D := [a, b] \times [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^2$ erklärt, und $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung in $[a, b]$, wenn $y(x)$ dort stetig differenzierbar ist, der Graph von $y(x)$ in D liegt, und $y(x)$ die Differentialgleichung in $[a, b]$ erfüllt, d.h.

$$(x, y(x)) \in D, \quad y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{für } x \in [a, b].$$

Die explizit gegebene Differentialgleichung (2.1) erster Ordnung erlaubt eine einfache geometrische Interpretation. Sei $y(x)$ eine Integralkurve durch den Punkt $(x_0, y_0) \in D$, d.h.

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0).$$

Durch die Differentialgleichung (2.1) wird also die Steigung der durch den Punkt (x_0, y_0) gehenden Lösungskurve $y(x)$ beschrieben. Diese Betrachtung kann für jeden Punkt aus D durchgeführt werden, womit sich ein Richtungsfeld der Differentialgleichung erstellen läßt, siehe Abbildung 2.1. Das Richtungsfeld ist also die Gesamtheit aller Linienelemente

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0)), \quad (x_0, y_0) \in D.$$

Offenbar geht durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D$ eine Lösungskurve $y(x)$, die Bedingung

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.2}$$

beschreibt also genau eine Lösungskurve $y(x)$ der Differentialgleichung (2.1). Die Bedingung (2.2) bezeichnet man als Anfangsbedingung, und das zugehörige Anfangswertproblem lautet

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{für } x \in [a, b], \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{für } x_0 \in [a, b]. \tag{2.3}$$

Im folgenden betrachten wir einige Beispiele für explizit gegebene Differentialgleichungen erster Ordnung, welche eine einfache Bestimmung der Lösung ermöglichen.

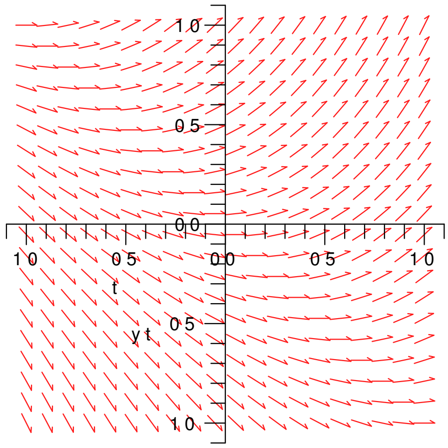

Abbildung 2.1: Richtungsfeld der Differentialgleichung $y'(x) = y(x) + x$.

2.1 Elementar integrierbare Differentialgleichungen

Für

$$f(x, y) = g(x)$$

ergibt sich für das Anfangswertproblem (2.3) die Darstellung

$$y'(x) = g(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad y(x_0) = y_0. \tag{2.4}$$

Durch Integration der Differentialgleichung in (2.4) folgt als Lösung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds.$$

Für

$$f(x, y) = h(y)$$

lautet das Anfangswertproblem (2.3)

$$y'(x) = h(y(x)) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad y(x_0) = y_0. \tag{2.5}$$

Solange die Voraussetzung $h(y(x)) \neq 0$ erfüllt ist, andernfalls sind Fallunterscheidungen vorzunehmen, führt die Division durch $h(y(x))$ auf das Anfangswertproblem

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = 1 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad y(x_0) = y_0.$$

Anschliessende Integration, dabei ersetzen wir die Integrationsvariable x durch $s \in (x_0, x)$, ergibt

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{h(y(s))}\, ds = \int_{x_0}^{x} ds = x - x_0\,.$$

Mit den Transformationen

$$z = y(s), \quad dz = y'(s)ds$$

folgt

$$x - x_0 = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dz}{h(z)} = H(y(x)) - H(y(x_0))$$

mit der Stammfunktion

$$H(z) = \int \frac{dz}{h(z)}\,.$$

Damit ergibt sich die Lösung des Anfangswertproblems (2.5) als die durch

$$H(y(x)) - H(y_0) - (x - x_0) = 0 \tag{2.6}$$

implizit gegebene Funktion $y(x)$.

Beispiel 2.1. *Betrachtet wird das Anfangswertproblem*

$$y'(x) = \sqrt{y(x)} \quad \textit{für } x \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 0.$$

Dabei ist $y(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ vorauszusetzen. Offensichtlich ist $y(x) \equiv 0$ eine Lösung. Wegen $y'(x) = \sqrt{y(x)} \geq 0$ folgt weiters, daß jede Lösung der Differentialgleichung monoton wachsend ist. Mit

$$H(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}, \quad H(y(x)) = 2\sqrt{y(x)}, \quad H(y(0)) = 0.$$

bleibt (2.6) zu lösen,

$$2\sqrt{y(x)} = x\,.$$

Wegen $\sqrt{y(x)} \geq 0$ gilt dies nur für $x \geq 0$. Dann folgt

$$y(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad \textit{für } x \geq 0.$$

Für $x < 0$ ist die Lösung gegeben durch $y(x) \equiv 0$. Die so erhaltene Lösung

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^2 & \textit{für } x \geq 0, \\ 0 & \textit{für } x < 0 \end{cases}$$

ist für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für jede nicht negative Konstante $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$, ist

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-c}{2}\right)^2 & \textit{für } x \geq c, \\ 0 & \textit{für } x < c \end{cases}$$

ebenfalls eine Lösung des betrachteten Anfangswertproblems, dieses hat also unendlich viele Lösungen, siehe Abbildung 2.2.

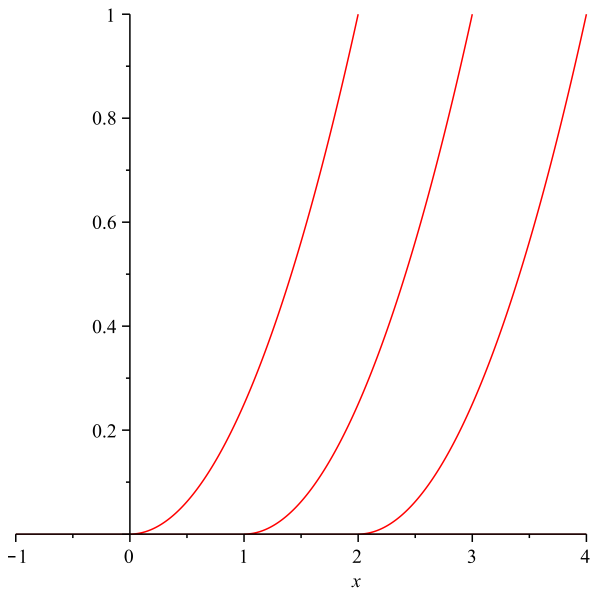

Abbildung 2.2: Lösungen für $c = 0, 1, 2$.

In Beispiel 2.1 haben wir gesehen, daß das dort betrachtete Anfangswertproblem unendlich viele Lösungen hat. Bei einer anderen Wahl der Anfangsbedingung kann man aber eine eindeutig bestimmte Lösung erhalten.

Beispiel 2.2. *Für die Lösung des Anfangswertproblems*

$$y'(x) \;=\; \sqrt{y(x)} \quad \textit{für } x \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 1$$

erhält man wie in Beispiel 2.1 die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x+2}{2}\right)^2 & \textit{für } x \geq -2, \\ 0 & \textit{für } x < -2. \end{cases}$$

Wir werden später sehen, welche Voraussetzungen hinreichend für die eindeutige Lösbarkeit eines Anfangswertproblems sind.

Die beiden bisher behandelten Differentialgleichungen (2.4) und (2.5) sind Spezialfälle des Anfangswertproblems

$$y'(x) = g(x)h(y(x)) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.7}$$

mit

$$f(x, y) = g(x)h(y).$$

Die Trennung der Veränderlichen führt, unter der Voraussetzung $h(y) \neq 0$, auf

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x),$$

und anschliessende Integration ergibt

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{h(y(s))}\, ds = \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds.$$

Mit der Substitution $z = y(s)$, $dz = y'(s)ds$, folgt

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dz}{h(z)} = \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds\,.$$

Damit ergibt sich $y(x)$ implizit als Lösung der Gleichung

$$H(y(x)) - H(y_0) - \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds = 0, \quad H(z) = \int \frac{dz}{h(z)}. \tag{2.8}$$

Für die Untersuchung der Lösbarkeit dieser Gleichung betrachten wir

$$\chi(y) := H(y) - H(y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{dz}{h(z)}.$$

Sei $h(y)$ in einer Umgebung von y_0 von Null verschieden, d.h. entweder positiv oder negativ. Dann ist

$$\chi(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dz}{h(z)}$$

in dieser Umgebung entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. In beiden Fällen existiert die zu χ inverse Funktion χ^{-1}, und somit folgt

$$y(x) = \chi^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds\right)$$

in einer geeignet gewählten Umgebung von x_0. Die Voraussetzung $h(y_0) \neq 0$ ist dabei wesentlich für die Eindeutigkeit der Lösung $y(x)$. Für $h(y_0) = 0$ ist nämlich $y(x) = y_0$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = g(x)h(y) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad y(x_0) = y_0.$$

Neben der Eindeutigkeit einer Lösung ist auch nach dem Definitionsbereich dieser Lösung zu fragen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2.3. *Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung*

$$y'(x) = x\,y(x)(y(x)-2) \quad \textit{für } x \in \mathbb{R}.$$

Offensichtlich sind $y(x) \equiv 0$ *und* $y(x) \equiv 2$ *Lösungen der Differentialgleichung. Für* $y(x) \neq 0$ *und* $y(x) \neq 2$ *folgt durch Trennung der Veränderlichen*

$$\frac{y'(x)}{y(x)(y(x)-2)} = x\,.$$

Die Substitution $x = s$ *und anschliessende Integration ergibt, mit der Substitution* $z = y(s)$*,*

$$\int^x \frac{y'(s)}{y(s)(y(s)-2)}\,ds = \int^{y(x)} \frac{dz}{z(z-2)} = \int^{y(x)} \left[-\frac{1}{2z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-2}\right] dz = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y(x)-2}{y(x)}\right|$$

bzw.

$$\int^{y(x)} s\,ds = \frac{1}{2}(x^2+c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Damit folgt

$$\ln\left|\frac{y(x)-2}{y(x)}\right| = x^2 + c,$$

und es sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1. *Für* $y(x) > 2$ *ist*

   $$y(x) - 2 = y(x)e^{x^2+c}$$

   und somit folgt

   $$y(x) = \frac{2}{1-e^{x^2+c}}\,.$$

   Wegen $y(x) > 2$ *muß* $e^{x^2+c} < 1$ *gelten, d.h.* $x^2 + c < 0$*. Damit ergibt sich für* $c < 0$ *die Lösung*

   $$y(x) = \frac{2}{1-e^{x^2+c}} \quad \textit{für } x^2 < -c,\ c < 0.$$

2. *Für* $y(x) \in (0,2)$ *ist*

   $$2 - y(x) = y(x)e^{x^2+c}$$

   und somit folgt

   $$y(x) = \frac{2}{1+e^{x^2+c}} \quad \textit{für alle } c \in \mathbb{R}.$$

3. *Für* $y(x) < 0$ *ist*

   $$2 - y(x) = -y(x)e^{x^2+c}$$

   und somit

   $$y(x) = \frac{2}{1-e^{x^2+c}}$$

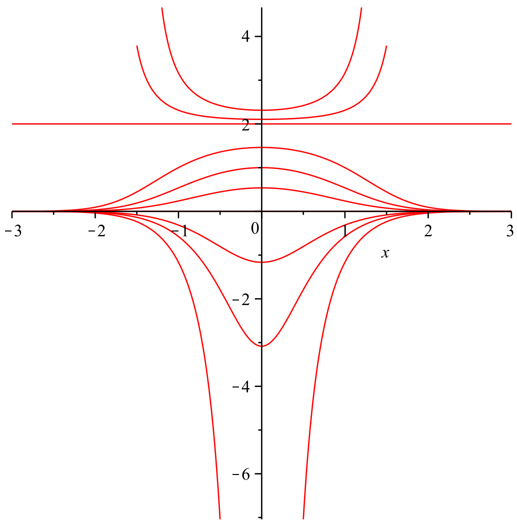

Abbildung 2.3: Allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Wegen $y(x) < 0$ muß $x^2 + c > 0$ gelten, d.h. es ist

$$y(x) = \frac{2}{1 - e^{x^2+c}} \quad \textit{für } x^2 > -c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 2.3 zeigt, daß, je nach Anfangsbedingung, neben unendlich oft stetig differenzierbaren Lösungen, auch Lösungen mit Singularitäten auftreten können. Wie das folgende Beispiel zeigt, kann man im allgemeinen nicht von der Gestalt der Differentialgleichung auf das Verhalten der Lösung schliessen.

Beispiel 2.4. *Für die Differentialgleichung*

$$y'(x) = e^{y(x)} \sin x$$

mit einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion

$$f(x, y) = e^y \sin x$$

ergibt sich die allgemeine Lösung

$$y(x) = -\ln(\cos x + c)\,.$$

Für $c > 1$ folgt die Existenz und Beschränktheit einer Lösung für alle $x \in \mathbb{R}$, während die Lösung für $c \in (-1, 1]$ ein singuläres Verhalten zeigt, d.h. das Anfangswertproblem ist nur lokal lösbar. Als Beispiel betrachten wir die Anfangsbedingung $y(0) = -\ln 2$ mit $c = 1$, und somit

$$y(x) = -\ln(\cos x + 1) \quad \textit{für } x \in (-\pi, \pi).$$

Die Lösung $y(x)$ weist also für $x = \pm\pi$ eine Singularität auf.

Die vorherigen Beispiele zeigen, daß sowohl die Eindeutigkeit von Lösungen als auch deren Gestalt im allgemeinen nicht von den gegebenen Anfangsbedingungen, und auch nicht von der rechten Seite der Differentialgleichung abgeleitet werden können. Bevor wir die Lösbarkeit expliziter Differentialgleichungen erster Ordnung untersuchen, betrachten wir im folgenden Differentialgleichungen, welche sich durch einfache Transformationen auf die bereits behandelten Fälle, insbesondere auf das Anfangswertproblem (2.7), zurückführen lassen.

Für Differentialgleichungen der Gestalt

$$y'(x) = f(ax + by(x) + c) \quad \text{mit } b \neq 0 \tag{2.9}$$

führt die Transformation

$$u(x) := ax + by(x) + c$$

auf die Differentialgleichung

$$u'(x) = a + by'(x) = a + bf(u(x)) =: h(u(x)),$$

welche mittels Trennung der Veränderlichen, vergleiche (2.5), gelöst werden kann.

Beispiel 2.5. *Für die Differentialgleichung*

$$y'(x) = (x + y(x))^2$$

führt die Transformation

$$u(x) := x + y(x)$$

auf die Differentialgleichung

$$u'(x) = 1 + y'(x) = 1 + (u(x))^2.$$

Die Trennung der Veränderlichen ergibt

$$\frac{u'(x)}{1 + (u(x))^2} = 1,$$

und unbestimmte Integration, mit der Substitution $z := u(x)$, ergibt

$$\int \frac{dz}{1 + z^2} = x + c, \quad \textit{d.h.} \quad \arctan z = x + c.$$

Damit folgt

$$u(x) = \tan(x + c), \quad y(x) = \tan(x + c) - x.$$

Homogene Differentialgleichungen der Form

$$y'(x) = f\Big(\frac{y(x)}{x}\Big) \quad \text{für } x \neq 0 \tag{2.10}$$

können mit der Transformation

$$y(x) := x\,u(x)$$

und

$$y'(x) = u(x) + x\,u'(x) = f(u(x))$$

in die Differentialgleichung

$$u'(x) = \frac{1}{x}\Big[f(u(x)) - u(x)\Big] = g(x)h(u(x))$$

mit

$$g(x) := \frac{1}{x}, \quad h(u) := f(u) - u$$

überführt werden, welche durch Trennung der Veränderlichen wie für (2.7) gelöst werden kann.

Beispiel 2.6. *Für die Lösung des Anfangswertproblems*

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} - \frac{x^2}{(y(x))^2}, \quad y(1) = 1, \quad x > 0,$$

führt die Transformation $y(x) := x\,u(x)$ *auf die Differentialgleichung*

$$u'(x) = \frac{1}{x}\Big[u(x) - \frac{1}{(u(x))^2} - u(x)\Big] = -\frac{1}{x}\,\frac{1}{(u(x))^2}$$

mit der Anfangsbedingung $u(1) = y(1) = 1$. *Die Trennung der Veränderlichen ergibt*

$$(u(x))^2\,u'(x) = -\frac{1}{x},$$

und Integration liefert

$$\int_1^x (u(s))^2\,u'(s)\,ds = -\int_1^x \frac{1}{s}\,ds = -\ln x.$$

Mit der Substitution $z = u(s)$ *folgt*

$$-\ln x = \int_1^{u(x)} z^2\,dz = \frac{1}{3}[(u(x))^3 - 1].$$

Daraus ergibt sich

$$y(x) = x\,\sqrt[3]{1 - 3\ln x},$$

wobei

$$1 - 3\ln x > 0$$

vorauszusetzen ist. In den beiden Grenzfällen $x = 0$, $x = e^{1/3}$ *ist die Differentialgleichung nicht mehr erklärt, siehe auch Abbildung* 2.4.

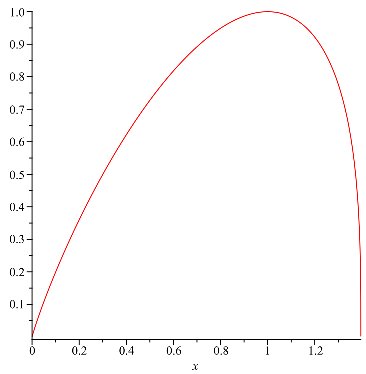

Abbildung 2.4: Lösung $y(x) = x\sqrt[3]{1 - 3\ln x}$.

Für die Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = f\left(\frac{ax + by(x) + c}{\alpha x + \beta y(x) + \gamma}\right) \tag{2.11}$$

betrachten wir zunächst den Spezialfall $c = \gamma = 0$ und $x \neq 0$. Dann erhalten wir mit

$$y'(x) = f\left(\frac{ax + by(x)}{\alpha x + \beta y(x)}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{y(x)}{x}}{\alpha + \beta\frac{y(x)}{x}}\right)$$

eine homogene Differentialgleichung der Gestalt (2.10). Für $c \neq 0$ oder $\gamma \neq 0$ motivieren die obigen Betrachtungen eine Koordinatentransformation

$$\overline{y} = y - y_0, \quad \overline{x} = x - x_0$$

mit

$$\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} = \frac{a(x - x_0) + b(y - y_0) + ax_0 + by_0 + c}{\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma} = \frac{a\overline{x} + b\overline{y}}{\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}},$$

falls (x_0, y_0) eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$ax_0 + by_0 + c = 0, \quad \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$$

ist. Für die eindeutige Lösbarkeit dieses Systems ist die Bedingung

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$$

vorauszusetzen. Wegen

$$\overline{y} = y - y_0 = y(x) - y_0 = y(\overline{x} + x_0) - y_0 =: \overline{y}(\overline{x})$$

und

$$\frac{d}{d\overline{x}}\overline{y}(\overline{x}) = \frac{d}{d\overline{x}}\Big[y(\overline{x} + x_0) - y_0\Big] = \frac{d}{dx}y(x)_{|x=\overline{x}+x_0}\frac{d}{d\overline{x}}\Big[\overline{x} + x_0\Big] = \frac{d}{dx}y(x)$$

ist schließlich die homogene Differentialgleichung

$$\overline{y}'(\overline{x}) = f\left(\frac{a\overline{x} + b\overline{y}}{\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}}\right)$$

zu lösen, siehe wieder (2.10). Zu untersuchen bleibt der Fall

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0,$$

d.h. für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\alpha = \lambda a, \quad \beta = \lambda b.$$

Dann lautet die Differentialgleichung (2.11)

$$y'(x) = f\left(\frac{ax + by(y) + c}{\lambda(ax + by(x)) + \gamma}\right) = f\left(\frac{u(x) + c}{\lambda u(x) + \gamma}\right)$$

mit

$$u(x) := ax + by(x),$$

so daß wieder eine Trennung der Veränderlichen angewendet werden kann.

Beispiel 2.7. *Für die Differentialgleichung*

$$y'(x) = \frac{y(x) + 1}{x + 2} - \exp\left(\frac{y(x) + 1}{x + 2}\right)$$

ist

$$f(z) = z - e^z, \quad z := \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} = \frac{y + 1}{x + 2},$$

und somit

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 2.$$

Für die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$ax_0 + by_0 + c = y_0 + 1 = 0, \quad \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = x_0 + 2 = 0$$

folgt

$$x_0 = -2, \quad y_0 = -1.$$

Damit ist

$$z = \frac{\overline{y}}{\overline{x}}, \quad \overline{x} = x + 2, \quad \overline{y} = y + 1,$$

und zu lösen bleibt die Differentialgleichung

$$\overline{y}'(\overline{x}) = \frac{\overline{y}}{\overline{x}} - \exp\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right), \quad \overline{y}(\overline{x}) = y(x) - y_0.$$

Mit den Transformationen

$$\overline{y}(\overline{x}) = \overline{x}\, z(\overline{x}), \quad \overline{y}'(\overline{x}) = z(\overline{x}) + \overline{x}\, z'(\overline{x}) = z(\overline{x}) - \exp z(\overline{x})$$

ergibt sich die Differentialgleichung

$$z'(\overline{x}) = -\frac{1}{\overline{x}} \exp z(\overline{x}).$$

Die Trennung der Veränderlichen führt auf

$$-\int z'(\overline{x}) \exp[-z(\overline{x})]\, d\overline{x} = \int \frac{1}{\overline{x}}\, d\overline{x} = \ln(c\,|\overline{x}|)\,.$$

Mit

$$-\int z'(\overline{x}) \exp[-z(\overline{x})]\, d\overline{x} = \exp[-z(\overline{x})]$$

folgt schließlich

$$z(\overline{x}) = -\ln\Big(\ln(c\,|\overline{x}|)\Big),$$

wobei $c\,|\overline{x}| > 1$ *vorauszusetzen ist. Einsetzen der Transformationen ergibt dann*

$$y(x) = -1 - (x+2)\ln\Big(\ln(c\,|x+2|)\Big) \quad \textit{für } c\,|x+2| > 1.$$

Insbesondere für die Lösung durch den Ursprung, d.h. $y(0) = 0$, *folgt*

$$c = \frac{1}{2} \exp\Big[e^{-1/2}\Big]\,.$$

2.2 Lineare Differentialgleichungen

Als Spezialfall von (2.7) betrachten wir für $h(y) = -y$ das Anfangswertproblem der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y'(x) + g(x)y(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad y(x_0) = y_0. \tag{2.12}$$

Durch Trennung der Veränderlichen, unter der Voraussetzung $y(x) \neq 0$, ergibt sich die Lösung

$$y(x) = y_0\, e^{G(x_0)-G(x)} = y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} g(s)ds \right). \tag{2.13}$$

Dabei ist

$$G(x) = \int g(x)\, dx\,.$$

Der in der Differentialgleichung (2.12) auftretende Differentialoperator

$$L[y](x) := y'(x) + g(x)y(x) \tag{2.14}$$

ordnet jeder differenzierbaren Funktion $y(x)$ eine Funktion

$$\psi(x) := L[y](x) = y'(x) + g(x)y(x)$$

zu. Der in (2.14) gegebene Differentialoperator L ist linear, d.h. für alle stetig differenzierbaren Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ und für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} L[\alpha y_1 + \beta y_2](x) &= [\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)]' + g(x)[\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)] \\ &= \alpha[y_1'(x) + g(x)y_1(x)] + \beta[y_2'(x) + g(x)y_2(x)] \\ &= \alpha L[y_1](x) + \beta L[y_2](x). \end{aligned}$$

Im folgenden betrachten wir die inhomogene Differentialgleichung

$$y'(x) + g(x)y(x) = f(x), \tag{2.15}$$

deren Lösungen nach einem Ansatz von Lagrange durch Variation der Konstanten bestimmt werden können. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y'(x) + g(x)y(x) = 0$$

lautet

$$y(x) = c\, y_h(x), \quad y_h(x) = e^{-G(x)} = \exp\left(-\int g(x)\, dx\right).$$

Aufgrund der Linearität des Differentialoperators L kann die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (2.15) geschrieben werden als

$$y(x) = c\, y_h(x) + y_p(x).$$

Dabei ist y_p eine noch zu bestimmende partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.15), d.h.

$$y_p'(x) + g(x)y_p(x) = f(x).$$

Bei der Variation der Konstanten zur Bestimmung einer partikulären Lösung führt der Ansatz

$$y_p(x) := c(x)y_h(x) \tag{2.16}$$

auf die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} f(x) &= y_p'(x) + g(x)y_p(x) \\ &= [c(x)y_h(x)]' + g(x)c(x)y_h(x) \\ &= c'(x)y_h(x) + c(x)\underbrace{[y_h'(x) + g(x)y_h(x)]}_{=0} = c'(x)y_h(x), \end{aligned}$$

und somit auf

$$c'(x) = \frac{f(x)}{y_h(x)}.$$

Integration führt schließlich zur Bestimmung von

$$c(x) = \int f(x)\, e^{G(x)}\, dx\,,$$

und in der Folge auf

$$y_p(x) = c(x) y_h(x) = \int^x f(s)\, e^{G(s)-G(x)}\, ds\,. \tag{2.17}$$

Beispiel 2.8. *Für die inhomogene Differentialgleichung*

$$y'(x) + y(x) \sin x = \sin^3 x$$

lautet die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$y'(x) + y(x) \sin x = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$y(x) = c\, y_h(x), \quad y_h(x) = \exp\left(-\int \sin x\, dx\right) = e^{\cos x}.$$

Damit lautet der Ansatz für eine partikuläre Lösung

$$y_p(x) = c(x) y_h(x) = c(x)\, e^{\cos x},$$

und zu lösen bleibt

$$c'(x) = \frac{f(x)}{y_h(x)} = \sin^3 x\, e^{-\cos x}\,.$$

Durch partielle Integration folgt

$$\begin{aligned} c(x) &= \int e^{-\cos x} \sin^3 x\, dx \\ &= e^{-\cos x} \sin^2 x - 2 \int e^{-\cos x} \sin x\, \cos x\, dx \\ &= e^{-\cos x} \sin^2 x - 2e^{-\cos x} \cos x - 2 \int e^{-\cos x} \sin x\, dx \\ &= e^{-\cos x} \sin^2 x - 2e^{-\cos x} \cos x - 2e^{-\cos x}, \end{aligned}$$

und eine partikuläre Lösung lautet

$$y_p(x) = \sin^2 x - 2 \cos x - 2.$$

Für die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich also

$$y(x) = \sin^2 x - 2 \cos x - 2 + c\, e^{\cos x}\,, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Im folgenden betrachten wir wieder nichtlineare Differentialgleichungen, welche sich durch geeignete Transformationen auf bereits behandelte Fälle zurückführen lassen.

Die Bernoullische Differentialgleichung

$$y'(x) + g(x)y(x) + h(x)[y(x)]^\alpha = 0, \quad \alpha \neq 1, \tag{2.18}$$

kann durch die Transformation

$$u(x) := [y(x)]^{1-\alpha}, \quad u'(x) = (1-\alpha)[y(x)]^{-\alpha}y'(x)$$

und

$$y'(x)[y(x)]^{-\alpha} + g(x)[y(x)]^{1-\alpha} + h(x) = 0$$

auf die lineare Differentialgleichung

$$u'(x) + (1-\alpha)g(x)u(x) + (1-\alpha)h(x) = 0$$

zurückgeführt werden.

Für ein allgemeines $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$, ist $y(x) > 0$ vorauszusetzen. Für ganzzahlige α ergeben sich auch negative Lösungen. Sei $y(x)$ eine Lösung der Bernoulli–Gleichung,

$$y'(x) + g(x)y(x) + h(x)[y(x)]^\alpha = 0,$$

dann ist

$$\overline{y}(x) := -y(x)$$

für ein ungerades α ebenfalls Lösung der Bernoulli–Gleichung

$$\overline{y}'(x) + g(x)\overline{y}(x) + h(x)[\overline{y}(x)]^\alpha = 0,$$

während für gerades α

$$\overline{y}'(x) + g(x)\overline{y}(x) - h(x)[\overline{y}(x)]^\alpha = 0$$

folgt.

Beispiel 2.9. *Für das Anfangswertproblem der Bernoullischen Differentialgleichung*

$$y'(x) + \frac{y(x)}{1+x} + (1+x)[y(x)]^4 = 0 \quad \textit{für}\ x > -1, \quad y(0) = -1,$$

führt die Transformation

$$u(x) := [y(x)]^{-3}, \quad u'(x) = -3\,[y(x)]^{-4}\,y'(x)$$

auf das Anfangswertproblem

$$u'(x) - \frac{3}{1+x}u(x) - 3(1+x) = 0 \quad \textit{für}\ x > -1, \quad u(0) = -1.$$

Für die homogene Differentialgleichung

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{3}{1+x}$$

ergibt sich die allgemeine Lösung

$$u(x) = c\, u_h(x), \quad u_h(x) = (1+x)^3\,.$$

Für die Bestimmung einer partikulären Lösung führt der Ansatz

$$u_p(x) = c(x)\,(1+x)^3$$

auf die Differentialgleichung

$$c'(x) = \frac{3}{(1+x)^2},$$

und somit

$$c(x) = -\frac{3}{1+x}, \quad u_p(x) = -3(1+x)^2.$$

Die allgemeine Lösung der transformierten Differentialgleichung lautet also

$$u(x) = c\,(1+x)^3 - 3(1+x)^2 = (1+x)^2[c\,(1+x) - 3],$$

und aus der Anfangsbedingung $u(0) = -1$ *folgt* $c = 2$. *Die Lösung*

$$u(x) = (1+x)^2(2x-1)$$

ist für $x \in (-1, \frac{1}{2})$ *negativ, daher folgt für die rücktransformierte Lösung*

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-2x)}} \quad \textit{für } -1 < x < \frac{1}{2}.$$

Abschliessend betrachten wir eine Riccatische Differentialgleichung der Form

$$y'(x) + g(x)y(x) + h(x)[y(x)]^2 = f(x), \tag{2.19}$$

wobei wir die Kenntnis einer partikulären Lösung y_p voraussetzen wollen, d.h.

$$y_p'(x) + g(x)y_p(x) + h(x)[y_p(x)]^2 = f(x).$$

Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung führt der Ansatz

$$y(x) = y_p(x) + z(x)$$

wegen

$$\begin{aligned} f(x) &= [y_p(x) + z(x)]' + g(x)[y_p(x) + z(x)] + h(x)[y_p(x) + z(x)]^2 \\ &= \underbrace{y_p'(x) + g(x)y_p(x) + h(x)[y_p(x)]^2}_{=f(x)} + z'(x) + [g(x) + 2h(x)y_p(x)]z(x) + h(x)[z(x)]^2 \end{aligned}$$

auf eine Bernoullische Differentialgleichung der Form

$$z'(x) + [g(x) + 2h(x)y_p(x)]z(x) + h(x)[z(x)]^2 = 0.$$

2.3 Exakte Differentialgleichungen

Durch die explizit gegebene Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

wird für $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ ein Richtungsfeld induziert, vergleiche Abbildung 2.1. Umgekehrt kann man zu jeder Kurvenschar eine Differentialgleichung erster Ordnung finden, so daß die Kurven Lösungen der Differentialgleichung beschreiben.

Beispiel 2.10. *Als einführendes Beispiel betrachten wir die durch*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad \textit{für}\, r > 0$$

gegebene Schar von Kreiskurven. Diese Gleichung beschreibt implizit eine Funktion $y(x)$ als Lösung der Gleichung

$$F(x, y(x)) = [y(x)]^2 + x^2 - r^2 = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = 2y(x)y'(x) + 2x = 0,$$

und somit die Differentialgleichung

$$y'(x)y(x) + x = 0.$$

Für die in Beispiel 2.10 betrachteten Kurven ergibt sich die explizite Darstellung

$$y(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{für } -r < x < r.$$

Insbesondere für $x = \pm r$ ist $y(\pm r) = 0$, und die Ableitung $y'(\pm r)$ ist singulär. Offensichtlich liegt dieses Verhalten in der unterschiedlichen Betrachtung von x und y, bzw. in der Wahl des Koordinatensystems. Daher betrachtet man x und y in einer symmetrischen Form, zum Beispiel durch die implizite Darstellung

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

oder in einer Parameterdarstellung

$$x = X(s) = r\cos s, \quad y = Y(s) = r\sin s \quad \text{für } s \in [0, 2\pi).$$

Allgemein lautet die Darstellung einer in der Ebene implizit gegebenen Kurve

$$F(x, y) = 0, \tag{2.20}$$

bzw. ist in Parameterdarstellung

$$F(X(s), Y(s)) = 0.$$

Differentiation nach dem Kurvenparameter s und Anwendung der Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}F(X(s),Y(s)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}F(x,y)_{|(x,y)=(X(s),Y(s))}\frac{d}{ds}X(s)+\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)_{|(x,y)=(X(s),Y(s))}\frac{d}{ds}Y(s) \\ &= g(X(s),Y(s))\frac{d}{ds}X(s)+h(X(s),Y(s))\frac{d}{ds}Y(s), \end{aligned} \tag{2.21}$$

wobei wir

$$g(x,y):=\frac{\partial}{\partial x}F(x,y), \quad h(x,y):=\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)$$

gesetzt haben. Dabei ist es sinnvoll,

$$[g(x,y)]^2+[h(x,y)]^2>0$$

vorauszusetzen, andernfalls wären alle Kurven $(x,y)=(X(s),Y(s))$ Lösungen der Differentialgleichung (2.21). Weiters seien $X(s)$ und $Y(s)$ stetig differenzierbar mit

$$\left[\frac{d}{ds}X(s)\right]^2+\left[\frac{d}{ds}Y(s)\right]^2>0.$$

Diese Bedingung schließt einerseits konstante Lösungen der Form $X(s)=c_1$ und $Y(s)=c_2$ aus, andererseits gewährleistet diese Bedingung die lokale Lösbarkeit der Differentialgleichung (2.21): Sei $(X(s),Y(s))$ eine Lösung der Differentialgleichung (2.21), d.h.

$$g(X(s),Y(s))\frac{d}{ds}X(s)+h(X(s),Y(s))\frac{d}{ds}Y(s)=0.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $x_0=X(s_0)$ und $X'(s_0)\neq 0$. Aufgrund der Stetigkeit von $X(s)$ bleibt dies auch in einer Umgebung von s_0 richtig. Für

$$\Phi(x,s):=X(s)-x, \quad \frac{\partial}{\partial s}\Phi(x,s)=\frac{d}{ds}X(s)$$

ist

$$\Phi(x_0,s_0)=0, \quad \frac{\partial}{\partial s}\Phi(x,s)_{(x,s)=(x_0,s_0)}=X'(s_0)\neq 0,$$

daher existiert nach dem Satz über implizite Funktionen in einer Umgebung von x_0 die Umkehrfunktion $s=S(x)$ mit

$$\Phi(x,S(x))=0,$$

bzw.

$$X(S(x))-x=0.$$

Daraus folgt

$$0=\frac{d}{dx}\Phi(x,S(x))=\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,s)_{|s=S(x)}+\frac{\partial}{\partial s}\Phi(x,s)_{|s=S(x)}\frac{d}{dx}S(x)=-1+\frac{d}{ds}X(s)\frac{d}{dx}S(x),$$

und somit
$$\frac{d}{dx}S(x) = \frac{1}{\frac{d}{ds}X(s)}, \quad s = S(x).$$
Mit $s = S(x)$ ist weiterhin
$$Y(s) = Y(S(x)) =: y(x),$$
und mit (2.21) folgt
$$y'(x) = \frac{d}{dx}Y(S(x)) = \frac{d}{ds}Y(s)\frac{d}{dx}S(x) = \frac{\frac{d}{ds}Y(s)}{\frac{d}{ds}X(s)} = -\frac{g(X(s),Y(s))}{h(X(s),Y(s))} = -\frac{g(x,y(x))}{h(x,y(x))},$$
d.h.
$$g(x, y(x)) + h(x, y(x))y'(x) = 0. \tag{2.22}$$
Ist umgekehrt $y(x)$ Lösung der Differentialgleichung (2.22), dann folgt mit der Parametrisierung
$$x = X(s) = s, \quad y = Y(s) = y(X(s))$$
und
$$\frac{d}{ds}X(s) = 1, \quad \frac{d}{ds}Y(s) = \frac{d}{ds}y(X(s)) = \frac{d}{dx}y(x)_{|x=X(s)}\frac{d}{ds}X(s) = y'(x)$$
die Beziehung
$$g(X(s),Y(s))\frac{d}{ds}X(s) + h(X(s),Y(s))\frac{d}{ds}Y(s) = 0,$$
d.h. (2.21). Dies zeigt die Äquivalenz der Differentialgleichungen (2.21) und (2.22). Im Fall $X'(s_0) = 0$ ist $Y'(s_0) \neq 0$, und die Differentialgleichung kann nach $x = x(y)$ aufgelöst werden.

Unter Verwendung des Differentials
$$dy = y'(x)dx$$
kann die Differentialgleichung (2.22) auch geschrieben werden als
$$g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0\,. \tag{2.23}$$

Definition 2.1. *Eine Differentialgleichung der Form*
$$g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0 \quad \text{in } D \subset \mathbb{R}^2$$
heißt exakt, wenn (g, h) *ein Gradientenfeld ist, d.h. wenn eine in* D *stetig differenzierbare Funktion* $F(x, y)$ *existiert mit*
$$g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}F(x, y), \quad h(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}F(x, y).$$

Für eine exakte Differentialgleichung folgt

$$dF(x, y) = 0, \tag{2.24}$$

d.h. für $x = X(s)$ und $y = Y(s)$ mit $dx = X'(s)ds$ und $dy = Y'(s)ds$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}F(X(s), Y(s)) &= \frac{\partial}{\partial x}F(x, y)_{|(x,y)=(X(s),Y(s))}\frac{d}{ds}X(s) + \frac{\partial}{\partial y}F(x, y)_{|(x,y)=(X(s),Y(s))}\frac{d}{ds}Y(s) \\
&= g(X(s), Y(s))\frac{d}{ds}X(s) + h(X(s), Y(s))\frac{d}{ds}Y(s) \\
&= g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0.
\end{aligned}$$

Für die Charakterisierung der Lösungen exakter Differentialgleichungen erhält man das folgende Resultat:

Satz 2.1. *Die Funktionen g und h seien in $D \subset \mathbb{R}^2$ stetig. Ist die Differentialgleichung*

$$g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0$$

exakt, und ist F eine in D stetig differenzierbare Stammfunktion mit

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x, y) = g(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}F(x, y) = h(x, y),$$

so ist das stetig differenzierbare Funktionenpaar $X(s)$ und $Y(s)$ genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn $F(X(s), Y(s))$ konstant ist. Durch Auflösen von

$$F(x, y) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

erhält man sämtliche Lösungskurven, und durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D$ geht genau eine Lösungskurve.

Beweis: Die exakte Differentialgleichung

$$g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0$$

ist äquivalent zu

$$dF(x, y) = 0,$$

d.h.

$$F(x, y) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Die Behauptung folgt dann aus der Anwendung des Satzes über implizite Funktionen. ■

Beispiel 2.11. *Für das Anfangswertproblem*

$$y'(x)y(x) + x = 0, \quad y(0) = 1$$

ist

$$g(x, y) = x, \quad h(x, y) = y,$$

und eine Stammfunktion ist durch

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

gegeben. Die Lösung der Differentialgleichung ergibt sich aus

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \alpha,$$

wobei $\alpha > 0$ *zu fordern ist. Daraus folgt zunächst*

$$y(x) = \pm\sqrt{2\alpha - x^2} \quad \textit{für } x^2 \leq 2\alpha$$

und aus der Anfangsbedingung

$$y(0) = \pm\sqrt{2\alpha} = 1$$

folgt $\alpha = \frac{1}{2}$ *und somit*

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \textit{für } x \in (-1, 1).$$

Beispiel 2.12. *Die Differentialgleichung*

$$\left(y^2 e^{xy} + 3x^2 y\right) dx + \left(x^3 + (1 + xy)e^{xy}\right) dy = 0$$

mit

$$g(x, y) = y^2 e^{xy} + 3x^2 y, \quad h(x, y) = x^3 + (1 + xy)e^{xy}$$

ist exakt, eine Stammfunktion ist gegeben durch

$$F(x, y) = y\left(e^{xy} + x^3\right).$$

Es stellt sich natürlich die Frage, wann eine gegebene Differentialgleichung der Form (2.22) exakt ist, und wie eine Stammfunktion berechnet werden kann. Aus

$$g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, y), \quad h(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$$

folgt bei Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} h(x, y)$$

als notwendige Bedingung für eine exakte Differentialgleichung. Zusammenfassend gilt:

Satz 2.2. *Sind die Funktionen $g(x, y)$ und $h(x, y)$ in dem einfach zusammenhängenden Gebiet D stetig differenzierbar, so existiert eine Stammfunktion genau dann, falls*

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} h(x, y) \quad \textit{in } D.$$

Die Stammfunktion ergibt sich als Kurvenintegral

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} \Big[g(u, v) du + h(u, v) dv \Big],$$

und die Bedingung $g_y(x, y) = h_x(x, y)$ ist äquivalent zur Wegunabhängigkeit dieses Kurvenintegrals.

Betrachten wir aber beispielsweise die Differentialgleichung

$$y dx + 2x dy = 0,$$

so ist diese offensichtlich nicht exakt. Eine Multiplikation mit y führt jedoch auf die Differentialgleichung

$$y^2 dx + 2xy dy = 0,$$

welche wegen

$$g(x, y) = y^2, \quad h(x, y) = 2xy$$

und

$$g_y(x, y) = 2y, \quad h_x(x, y) = 2y$$

exakt ist. Eine zugehörige Stammfunktion lautet

$$F(x, y) = xy^2.$$

Auch die Multiplikation der ursprünglichen Differentialgleichung mit $1/\sqrt{x}$ $(x > 0)$ führt auf eine exakte Differentialgleichung.

Definition 2.2. *Sind die Funktionen $g(x, y)$ und $h(x, y)$ in D stetig, so heißt jede in D stetige Funktion $M(x, y)$ integrierender Faktor oder Eulerscher Multiplikator, wenn die Differentialgleichung*

$$M(x, y)g(x, y)dx + M(x, y)h(x, y)dy = 0 \tag{2.25}$$

exakt ist.

Damit die Differentialgleichung (2.25) exakt ist, muß nach Satz 2.2 für stetig differenzierbare Funktionen

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[M(x, y)g(x, y)\Big] = \frac{\partial}{\partial x}\Big[M(x, y)h(x, y)\Big]$$

gelten, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) g(x,y) + M(x,y) \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} M(x,y) h(x,y) + M(x,y) \frac{\partial}{\partial x} h(x,y).$$

Für die Bestimmung von $M(x,y)$ muß im allgemeinen eine partielle Differentialgleichung gelöst werden. Es zeigt sich jedoch, daß unter bestimmten Voraussetzungen eine Funktion $M(x,y)$ explizit bestimmt werden kann. Der Ansatz $M(x,y) = M(x)$ führt auf

$$M(x,y) \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} M(x,y) h(x,y) + M(x,y) \frac{\partial}{\partial x} h(x,y),$$

bzw.

$$\frac{M'(x)}{M(x)} = \frac{g_y(x,y) - h_x(x,y)}{h(x,y)},$$

falls die rechte Seite nicht von y abhängt.

Beispiel 2.13. *Für die Differentialgleichung*

$$\Big(2x^2 + 2xy^2 + 1\Big) y \, dx + \Big(3y^2 + x\Big) \, dy = 0$$

ist

$$g(x,y) = \Big(2x^2 + 2xy^2 + 1\Big) y, \quad h(x,y) = 3y^2 + x\,.$$

Wegen

$$g_y(x,y) = 2x^2 + 6xy^2 + 1, \quad h_x(x,y) = 1$$

ist die Differentialgleichung nicht exakt, aber wegen

$$\frac{g_y(x,y) - h_x(x,y)}{h(x,y)} = \frac{2x^2 + 6xy^2 + 1 - 1}{3y^2 + x} = 2x$$

folgt

$$\frac{M'(x)}{M(x)} = 2x, \quad M(x) = e^{x^2}\,.$$

2.4 Verfahren von Picard–Lindelöf

Für das Anfangswertproblem einer explizit gegebenen Differentialgleichung erster Ordnung,

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{für } x > x_0, \quad y(x_0) = y_0, \tag{2.26}$$

erhalten wir für eine Lösung $y(x)$ durch Integration die Darstellung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s)) \, ds, \tag{2.27}$$

d.h. eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (2.26) genügt der Integralgleichung (2.27). Da in (2.27) die Veränderliche x in den Integrationsgrenzen auftritt, bezeichnet man diese als Volterrasche Integralgleichung. Zur Lösung von (2.27) betrachten wir eine Methode der sukzessiven Approximation, nämlich das Verfahren von Picard–Lindelöf: Ausgehend von einer Startnäherung $y^0(x) := y_0$ bestimmen wir rekursiv Näherungslösungen

$$y^{k+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y^k(s))\, ds \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots . \tag{2.28}$$

Zur Berechnung einer Lösung des Anfangswertproblems (2.26) ist die Iterationsvorschrift (2.28) nicht unbedingt geeignet, aber sie stellt ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von (2.26) dar.

Beispiel 2.14. *Für das Anfangswertproblem*

$$y'(x) = y(x) + x \quad \textit{für } x > 0, \quad y(0) = 0$$

ergibt sich für die Rekursionsvorschrift (2.28)

$$y^0(x) = 0, \quad y^{k+1}(x) = \int_0^x \left[y^k(s) + s\right] ds \quad \textit{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

und somit

$$\begin{aligned} y^1(x) &= \int_0^x s\, ds = \frac{1}{2}x^2, \\ y^2(x) &= \int_0^x \left[\frac{1}{2}s^2 + s\right] ds = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2, \\ y^3(x) &= \int_0^x \left[\frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{2}s^2 + s\right] ds = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion folgt

$$y^n(x) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}x^k .$$

Für den Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt sich

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y^n(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k - x - 1 = e^x - x - 1.$$

Zur Probe rechnen wir

$$y'(x) = e^x - 1 = y(x) + x, \quad y(0) = 0.$$

Allgemein stellt sich die Frage nach der Konvergenz der durch die Iterationsvorschrift (2.28) definierten Folge von Näherungslösungen $y^k(x)$. Die Iterationsvorschrift (2.28) genügt der allgemeinen Darstellung

$$y^{k+1}(x) := \Phi[y^k](x) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots \tag{2.29}$$

zur Lösung der Fixpunktgleichung

$$y(x) = \Phi[y](x). \tag{2.30}$$

Dabei ist

$$\Phi[y](x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds.$$

Ein Hilfsmittel zur Untersuchung der eindeutigen Lösbarkeit der Fixpunktgleichung (2.30) bzw. der Konvergenz der Methode der sukzessiven Approximation (2.29) ist der Banachsche Fixpunktsatz.

Satz 2.3. [7, Satz 5.22] *Gegeben seien der Banach–Raum $(X, \|\cdot\|)$, eine abgeschlossene Teilmenge $D = \overline{D}$ von X und eine Kontraktion $\Phi : D \to D \subset X$, d.h. es gilt*

$$\|\Phi[y_1] - \Phi[y_2]\| \leq q\, \|y_1 - y_2\| \quad \textit{für alle } y_1, y_2 \in D, \quad q < 1.$$

Dann hat die Fixpunktgleichung $y = \Phi[y]$ genau eine Lösung $y \in D$, d.h. Φ besitzt genau einen Fixpunkt in D. Bildet man für ein beliebiges Anfangselement $y^0 \in D$ die Folge der sukzessiven Approximationen $y^{k+1} := \Phi[y^k]$ für $k = 0, 1, 2, \dots$, so gilt die a priori Fehlerabschätzung

$$\|y - y^k\| \leq \frac{q^k}{1-q}\, \|y^1 - y^0\|\,.$$

Bevor wir Satz 2.3 zur Untersuchung der Volterraschen Integralgleichung (2.27) anwenden, wollen wir die hierfür benötigten Hilfsmittel kurz zusammenfassen.

Definition 2.3. *X heißt linearer Raum oder Vektorraum über $\mathbb{R}$ genau dann, wenn in X eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Skalaren erklärt sind, d.h. für $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt $x + y \in X$ und $\alpha \cdot x \in X$. Dabei gelten die Axiome der Addition,*

$$x + y = y + x, \quad (x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall (x, y) \in X\ \exists! z \in X : \ x + z = y.$$

Damit ergibt sich die Existenz eines Nullelements $0 \in X$ mit $x + 0 = x$, und des inversen Elements $-x \in X$ mit $x + (-x) = 0$. Die Multiplikation mit Skalaren genügt für $x, y \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,\ (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,\ \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x,\ 1 \cdot x = x.$$

Eine nichtleere Teilmenge D von X, welche wieder einen linearen Raum bildet, wird Unterraum $D \subset X$ von X genannt.

Beispiel 2.15.

1. *Der n–dimensionale Euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller n–Tupel reeller Zahlen*

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top, \quad x_k \in \mathbb{R} \quad \textit{für } k = 1, \ldots n,$$

wobei die Addition und die Multiplikation mit einem Skalar komponentenweise erklärt sind,

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^\top, \quad \alpha \cdot \underline{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)^\top.$$

2. *Der Raum $\mathcal{F}([a,b])$ ist die Menge der auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ beschränkten Funktionen,*

$$\mathcal{F}([a,b]) := \Big\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : |f(x)| < \infty \quad \textit{für alle } x \in [a,b] \Big\},$$

mit

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x), \quad \alpha \cdot f : x \mapsto \alpha\, f(x).$$

3. *Der Raum $C([a,b])$ ist die Menge der auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ beschränkten und stetigen Funktionen,*

$$C([a,b]) := \Big\{ f \in \mathcal{F}([a,b]) : g \text{ stetig in } [a,b] \Big\} \subset \mathcal{F}([a,b]),$$

d.h. $C([a,b])$ ist ein Unterraum von $\mathcal{F}([a,b])$.

Definition 2.4. *Sei X ein linearer Vektorraum. Eine Funktion $\|\cdot\| \to \mathbb{R}$ heißt Norm, falls für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

i. $\|x\| \geq 0$ *für alle* $x \in X$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

ii. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha|\, \|x\|$;

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$(X, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ heißen zueinander äquivalent, falls

$$c_1\, \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \quad \textit{für alle } x \in X$$

mit Konstanten c_1 und c_2 unabhängig von x gilt. Die Ungleichungen heißen scharf, falls Gleichheit für wenigstens ein $x \in X$ gilt.

Beispiel 2.16.

1. *Beispiele für Normen in* $\mathbb{R}^n$ *sind die Euklidische Norm*
$$\|\underline{x}\|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2},$$
die Maximumnorm
$$\|\underline{x}\|_\infty := \max_{k=1,\dots,n} |x_k|,$$
und die Summennorm
$$\|\underline{x}\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$
Für beliebiges $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ *gelten die Äquivalenzungleichungen*
$$\begin{array}{lclcl} \|\underline{x}\|_\infty & \leq & \|\underline{x}\|_1 & \leq & n\,\|\underline{x}\|_\infty, \\ \|\underline{x}\|_\infty & \leq & \|\underline{x}\|_2 & \leq & \sqrt{n}\,\|\underline{x}\|_\infty, \\ \|\underline{x}\|_2 & \leq & \|\underline{x}\|_1 & \leq & \sqrt{n}\,\|\underline{x}\|_2. \end{array}$$
Alle Abschätzungen sind scharf.

2. *Im Raum* $\mathcal{F}([a,b])$ *der auf einem abgeschlossenen Intervall* $[a,b]$ *beschränkten Funktionen definiert*
$$\|f\|_{\mathcal{F}([a,b])} := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$
die Maximumnorm. Äquivalente Normen können zum Beispiel durch gewichtete Normen
$$\|f\|_{\mathcal{F}([a,b]),\omega} := \max_{x\in[a,b]} |f(x)\omega(x)|$$
erklärt werden. Dabei ist
$$0 < \alpha \leq \omega(x) \leq \beta \quad \textit{für alle } x \in [a,b]$$
mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *vorauszusetzen.*

Wir nennen eine Elementfolge $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x^k \in X$ konvergent in X, falls diese Folge ein Grenzelement $x \in X$ besitzt und es gilt
$$\lim_{k\to\infty} \|x - x^k\| = 0,$$
d.h.
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \|x - x^k\| < \varepsilon \quad \text{für alle } k > N(\varepsilon).$$
Entsprechend heißt eine Folge $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in X Cauchy–Folge, wenn gilt:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \|x^k - x^\ell\| < \varepsilon \quad \text{für alle } k, \ell > N(\varepsilon).$$

Definition 2.5. *Ein normierter Vektorraum X heißt vollständig, wenn jede Cauchy–Folge in X einen Grenzwert in X besitzt. Man nennt einen vollständigen normierten Vektorraum auch einen Banach–Raum. Eine Teilmenge $D \subseteq X$ heißt abgeschlossen, falls sie mit $\overline{D}$, der Menge aller ihrer Häufungspunkte in X bezüglich $\|\cdot\|$ übereinstimmt.*

Als Beispiel für einen Banach–Raum betrachten wir den Raum $C([a,b])$ der im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetigen Funktionen, versehen mit der Maximumnorm

$$\|f\|_{C([a,b])} := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|\,.$$

Nun sind wir in der Lage, die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes (Satz 2.3) zur Lösung der Volterraschen Integralgleichung (2.27) zu formulieren.

Satz 2.4. *Für $(x,y) \in \mathcal{B} := [a,b] \times [\alpha,\beta]$ sei $f(x,y)$ stetig und erfülle eine Lipschitz–Bedingung bezüglich y, d.h. es gilt*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L\,|y_1 - y_2| \quad \textit{für alle } (x,y_1),(x,y_2) \in \mathcal{B}.$$

Dann konvergiert die durch (2.28) *definierte Funktionenfolge $\{y^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die stetig differenzierbare Lösung y des Anfangswertproblems* (2.26)*. In $[x_-,x_+]$ mit*

$$\begin{aligned} x_- &:= \min\Big\{x : (s,y(s)) \in \mathcal{B} \textit{ für alle } s \in [x,x_0]\Big\}, \\ x_+ &:= \max\Big\{x : (s,y(s)) \in \mathcal{B} \textit{ für alle } s \in [x_0,x]\Big\} \end{aligned}$$

ist y die einzige stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems (2.26)*. Dabei ist $(x_0,y_0) \in \mathcal{B}$ vorauszusetzen.*

Beweis: Zunächst definieren wir für $x \in [a,b]$ die Fortsetzung

$$\widetilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,\alpha) & \text{für } y < \alpha, \\ f(x,y) & \text{für } y \in [\alpha,\beta], \\ f(x,\beta) & \text{für } y > \beta, \end{cases}$$

so daß die Lipschitz–Bedingung

$$|\widetilde{f}(x,y_1) - \widetilde{f}(x,y_2)| \le L\,|y_1 - y_2| \quad \text{für alle } (x,y_1),(x,y_2) \in [a,b] \times \mathbb{R}$$

erfüllt ist. Nun versehen wir den Raum $C([a,b])$ der im Intervall $[a,b]$ stetigen Funktionen mit der gewichteten Bielecki–Norm

$$\|g\|_{C([a,b]),\gamma} := \max_{x\in[a,b]} \left| g(x) e^{-\gamma|x-x_0|} \right|.$$

Dabei ist $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig, aber geeignet zu wählen. Wegen

$$e^{-\gamma(b-a)}\,\|g\|_{C([a,b])} \le \|g\|_{C([a,b]),\gamma} \le \|g\|_{C([a,b])} \quad \text{für alle } g \in C([a,b])$$

folgt die Äquivalenz beider Normen.

Wir zeigen nun, dass in $D = C([a,b])$ mit der Norm $\|\cdot\|_{C([a,b]),\gamma}$ alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes (Satz 2.3) erfüllt sind, wenn $\gamma > L$ gewählt wird.

Für $z \in C([a,b])$ ist $\widetilde{f}(x, z(x))$ stetig, also auch

$$\widetilde{\Phi}[z](x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} \widetilde{f}(s, z(s))\, ds.$$

Sei weiterhin

$$M := \max_{(x,y)\in[a,b]\times\mathbb{R}} |\widetilde{f}(x,y)| = \max_{(x,y)\in\mathcal{B}} |f(x,y)| < \infty.$$

Für alle $z \in C([a,b])$ ist dann

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\Phi}[z]\|_{C([a,b]),\gamma} &= \max_{x\in[a,b]} \left| e^{-\gamma|x-x_0|}\widetilde{\Phi}[z](x)\right| \\
&= \max_{x\in[a,b]} \left| e^{-\gamma|x-x_0|} \left\{ y_0 + \int_{x_0}^{x} \widetilde{f}(s, z(s))\, ds \right\}\right| \\
&\leq |y_0| + M \max_{x\in[a,b]} \left| e^{-\gamma|x-x_0|}|x-x_0|\right\} \\
&\leq |y_0| + M \max_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{-\gamma|x-x_0|}|x-x_0|\right\} \leq |y_0| + \frac{M}{\gamma e}
\end{aligned}$$

und somit beschränkt; das Maximum wird für $|x - x_0| = \gamma^{-1}$ angenommen. Damit ist $\widetilde{\Phi} : C([a,b]) \to C([a,b])$ eine Selbstabbildung. Wegen

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\Phi}[z_1] - \widetilde{\Phi}[z_2]\|_{C([a,b]),\gamma} &= \max_{x\in[a,b]} \left| e^{-\gamma|x-x_0|} \left[\widetilde{\Phi}[z_1](x) - \widetilde{\Phi}[z_2](x)\right]\right| \\
&= \max_{x\in[a,b]} \left| e^{-\gamma|x-x_0|} \int_{x_0}^{x} [\widetilde{f}(s, z_1(s)) - \widetilde{f}(s, z_2(s))]\, ds\right| \\
&\leq L \max_{x\in[a,b]} \left| e^{-\gamma|x-x_0|} \int_{x_0}^{x} |z_1(s) - z_2(s)|\, ds\right| \\
&= L \max_{x\in[a,b]} \left| e^{-\gamma|x-x_0|} \int_{x_0}^{x} e^{\gamma|s-x_0|}\, |z_1(s) - z_2(s)|\, e^{-\gamma|s-x_0|}\, ds\right| \\
&\leq L \max_{x\in[a,b]} \left| e^{-\gamma|x-x_0|} \int_{x_0}^{x} e^{\gamma|s-x_0|}\, ds\right| \max_{s\in[a,b]} |z_1(s) - z_2(s)| e^{-\gamma|s-x_0|} \\
&= L \max_{x\in[a,b]} \left| e^{-\gamma|x-x_0|} \frac{1}{\gamma}\left(e^{\gamma|x-x_0|} - 1\right)\right| \|z_1 - z_2\|_{C([a,b]),\gamma} \\
&\leq \frac{L}{\gamma}\, \|z_1 - z_2\|_{C([a,b]),\gamma}
\end{aligned}$$

ist $\widetilde{\Phi} : C([a,b]) \to C([a,b])$ eine Kontraktion, wenn $\gamma > L$ gewählt wird. Damit liefert der Banachsche Fixpunktsatz (Satz 2.3) die Existenz einer eindeutigen Lösung der Volterraschen Integralgleichung

$$z(x) = \widetilde{\Phi}[z](x) \quad \text{für } x \in [a,b].$$

Für $(x, y) \in \mathcal{B}$ ist $\widetilde{f}(x, z) = f(x, z)$, d.h. für $y(x) := z(x)$, $x \in (x_-, x_+)$, folgt

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds \quad \text{für } x \in (x_-, x_+).$$

Daraus folgt

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{für } x \in (x_-, x_+), \quad y(x_0) = y_0,$$

d.h. $y(x)$ ist Lösung des Anfangswertproblems (2.26). ■

Beispiel 2.17. *Für das Anfangswertproblem*

$$y'(x) = y(x) + x \quad \textit{für } x > 0, \quad y(0) = 0$$

ist $f(x, y) = y + x$, *und somit folgt*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |(y_1 + x) - (y_2 + x)| = |y_1 - y_2|\,,$$

d.h. $f(x, y)$ *ist Lipschitz–stetig mit* $L = 1$. *Damit folgt die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems sowie die Konvergenz der in Beispiel* 2.14 *betrachteten Methode der sukzessiven Approximation.*

2.5 Existenzsatz von Peano

In Beispiel 2.1 haben wir bereits gesehen, dass die nichtnegative Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \sqrt{y(x)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 0$$

nicht eindeutig ist. Die Funktion $f(x, y) = \sqrt{y}$ erfüllt in der Umgebung von $y_0 = 0$ offenbar keine Lipschitz–Bedingung (man wähle $y_2 = 0$ und $y_1 = \varepsilon \to 0+$), und somit ist Satz 2.3 nicht anwendbar. Damit stellt sich die Frage, ob allein die Stetigkeit von $f(x, y)$ für die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems (2.26) ausreichend ist.

Satz 2.5 (Existenzsatz von Peano)**.** *Für* $(x, y) \in \mathcal{B} = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ *sei* $f(x, y)$ *stetig und es gelte*

$$M := \max_{(x,y) \in \mathcal{B}} |f(x, y)| < \infty.$$

Dann geht durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathcal{B}$ *wenigstens eine Lösung der Differentialgleichung* $y'(x) = f(x, y(x))$, *welche sich bis zum Rand von* $\mathcal{B}$ *fortsetzen lässt.*

Für den Beweis von Satz 2.5 betrachten wir mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren ein (numerisches) Verfahren zur näherungsweisen Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{für } x > x_0, \quad y(x_0) = y_0. \tag{2.31}$$

Für $N \in \mathbb{N}$ und eine Schrittweite $h = 1/N$ mit $h \to 0$ für $N \to \infty$ definieren wir rekursiv eine Näherungslösung

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad y_{k+1} = y_k + h\widetilde{f}(x_k, y_k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.32}$$

und

$$y_N(x) := \frac{1}{h}\Big[(x_{k+1} - x)y_k + (x - x_k)y_{k+1}\Big] \quad \text{für } x \in [x_k, x_{k+1}], \tag{2.33}$$

wobei wir wieder die Fortsetzung

$$\widetilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,\alpha) & \text{für } y < \alpha, \\ f(x,y) & \text{für } y \in [\alpha,\beta], \\ f(x,\beta) & \text{für } y > \beta, \end{cases}$$

mit

$$|\widetilde{f}(x,y)| \le M \quad \text{für alle } (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}.$$

betrachten. Wir wollen zeigen, daß die Folge der Näherungslösungen (2.33) eine konvergente Teilfolge enthält, deren Grenzfunktion Lösung des Anfangswertproblems (2.31) ist. Hierfür zeigen wir zunächst, daß die durch (2.33) erklärte Funktionenfolge gleichgradig gleichmässig stetig und gleichgradig beschränkt ist.

Definition 2.6. *Eine Funktionenfolge $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ heißt in $[a,b]$ gleichgradig gleichmässig stetig, falls für alle Funktionen g_k gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad |g_k(x) - g_k(y)| < \varepsilon \quad \textit{für alle } x, y \in [a,b] : |x-y| < \delta.$$

Dabei ist δ unabhängig von k.

Beispiel 2.18. *Die Menge aller Lipschitz–stetigen Funktionen $g(x)$, für welche*

$$|g(x) - g(y)| \le L\,|x-y| \quad \textit{für alle } x, y \in [a,b]$$

mit einer einheitlichen Lipschitz–Konstanten L gilt, ist gleichgradig gleichmässig stetig. Man wähle zum Beispiel $\delta := \varepsilon/L$.

Definition 2.7. *Eine Funktionenfolge $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ heißt in $[a,b]$ gleichgradig beschränkt, wenn für eine positive Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$|g_k(x)| \le c \quad \textit{für alle } x \in [a,b] \textit{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Für die durch das Eulersche Polygonzugverfahren (2.32) definierte Näherungslösung (2.33) finden wir die Darstellung

$$y_N(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F_N(s)\,ds \quad \text{für } x \in [a,b],$$

wenn

$$F_N(s) = \widetilde{f}(x_k, y_k) \quad \text{für } s \in (x_k, x_{k+1})$$

die stückweise konstante Steigung der Näherungslösung $y_N(x)$ bezeichnet. Dann folgt mit

$$|y_N(x)| \leq |y_0| + \int_{x_0}^{x} |F_N(s)|\, ds \leq |y_0| + M\,|b-a|$$

die gleichgradige Beschränktheit der Funktionenfolge $\{y_N(x)\}_{N\in\mathbb{N}}$. Für $x, z \in [a,b]$ folgt weiterhin

$$|y_N(x) - y_N(z)| = \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} F_N(s)\, ds - y_0 - \int_{x_0}^{z} F_N(s)\, ds \right| = \left| \int_{z}^{x} F_N(s)\, ds \right| \leq M\,|x-z|$$

und somit die gleichgradige gleichmässige Stetigkeit in $[a,b]$.

Satz 2.6 (Satz von Arzelà–Ascoli)**.** *Eine im Intervall $[a,b]$ gleichgradig gleichmässig stetige und gleichgradig beschränkte Funktionenfolge $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ enthält eine in $[a,b]$ gleichmässig konvergente Teilfolge.*

Beweis: Sei $A = \{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare und in $[a,b]$ dichte Punktmenge, zum Beispiel die Menge der rationalen Zahlen in $[a,b]$.

Seien $\varepsilon > 0$ und $x_j \in A$ beliebig gewählt. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit von $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon)$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|g_k(x) - g_k(x_j)| < \frac{1}{3}\varepsilon \quad \text{für alle } x \in [a,b],\ |x - x_j| < \delta.$$

Für das kompakte Intervall $[a,b]$ ist

$$[a,b] \subset \bigcup_{x_j \in A} U_\delta(x_j)$$

eine offene Überdeckung, nach dem Satz von Heine–Borel, siehe zum Beispiel [7, Satz 3.50], existiert dann eine endliche Überdeckung, d.h.

$$[a,b] \subset \bigcup_{j=1}^{M(\varepsilon)} U_\delta(x_j'), \quad x_j' \in A' \subset A, \quad \dim A' = M(\varepsilon) < \infty. \tag{2.34}$$

Für $x_1' \in A'$ ist die Zahlenfolge $\{g_k(x_1')\}_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt, daher existiert eine konvergente Teilfolge $\{g_{k'}(x_1')\}_{k'\in\mathbb{N}'}$ mit dem Grenzwert

$$g(x_1') := \lim_{k'\to\infty} g_{k'}(x_1').$$

Für $x_2' \in A'$ ist die Zahlenfolge $\{g_{k'}(x_2')\}_{k'\in\mathbb{N}'}$ ebenfalls beschränkt, und es existiert wieder eine konvergente Teilfolge $\{g_{k''}(x_2')\}_{k''\in\mathbb{N}''}$ mit dem Grenzwert

$$g(x_2') := \lim_{k''\to\infty} g_{k''}(x_2').$$

So fortfahrend erhalten wir für jedes $x'_j \in A'$ eine konvergente Teilfolge $\{g_{k^{(j)}}(x'_j)\}_{k^{(j)}\in\mathbb{N}^{(j)}}$ mit

$$g(x'_j) := \lim_{k^{(j)}\to\infty} g_{k^{(j)}}(x'_j)\,.$$

Insbesondere für $j = M(\varepsilon)$, A' ist endlich, gilt

$$g(x'_{M(\varepsilon)}) := \lim_{k^{(M(\varepsilon))}\to\infty} g_{k^{(M(\varepsilon))}}(x'_{M(\varepsilon)})\,.$$

Nach Konstruktion ist

$$\lim_{k^{(M(\varepsilon))}\to\infty} g_{k^{(M(\varepsilon))}}(x'_i) = g(x'_i) \quad \text{für alle } x'_i \in A',$$

weil $\{g_{k^{(M(\varepsilon))}}\}$ eine Teilfolge von allen vorherigen Folgen $\{g_{k^{(i)}}\}$ ist. Zu zeigen bleibt die gleichmässige Konvergenz der Funktionenfolge $\varphi_k(x) = g_{k^{(M(\varepsilon))}}(x)$, d.h.

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)\ :\quad |\varphi_k(x) - \varphi_\ell(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } k,\ell > N(\varepsilon),\ \forall x \in [a,b].$$

Aufgrund der Konvergenz von $\{\varphi_k(x'_i)\}_{k\in\mathbb{N}}$, $x'_i \in A'$, existiert ein $N = N(\varepsilon)$ mit

$$|\varphi_k(x'_i) - \varphi_\ell(x'_i)| < \frac{1}{3}\varepsilon \quad \text{für alle } k,\ell > N(\varepsilon),\ x'_i \in A'.$$

Sei $x \in [a,b]$ beliebig. Wegen der endlichen Überdeckung (2.34) existiert ein $x'_j \in A'$ mit $x \in U_\delta(x'_j)$. Für $k,\ell > N(\varepsilon)$ folgt dann

$$|\varphi_k(x) - \varphi_\ell(x)| \le \underbrace{|\varphi_k(x) - \varphi_k(x'_j)|}_{<\frac{1}{3}\varepsilon \text{ (gleichgradige St.)}} + \underbrace{|\varphi_k(x'_j) - \varphi_\ell(x'_j)|}_{<\frac{1}{3}\varepsilon \text{ (Konvergenz)}} + \underbrace{|\varphi_\ell(x'_j) - \varphi_\ell(x)|}_{<\frac{1}{3}\varepsilon \text{ (gleichgradige St.)}} < \varepsilon.$$

$\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist also Cauchy–Folge in $C([a,b])$ bezüglich der Maximum–Norm, $C([a,b])$ ist vollständig bezüglich der gleichmässigen Konvergenz, und daraus folgt die Stetigkeit von $g(x)$ für $x \in [a,b]$. ∎

Jetzt sind wir in der Lage, den Existenzsatz von Peano (Satz 2.5) zu beweisen:

Beweis von Satz 2.5: Für die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \widetilde{f}(x,y(x)) \quad \text{für } x \ge x_0, \quad y(x_0) = y_0$$

betrachten wir das Eulersche Polygonzugverfahren (2.32) und (2.33),

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad y_{k+1} = y_k + h\widetilde{f}(x_k,y_k) \quad \text{für } k = 0,1,2,\ldots$$

und

$$y_N(x) = \frac{1}{h}\Big[(x_{k+1} - x)y_k + (x - x_k)y_{k+1}\Big]$$

für $h = 1/N$ und $N \to \infty$. Die Funktionenfolge $\{y_N\}_{N\in\mathbb{N}} \subset C([a,b])$ ist eine Folge gleichgradig gleichmässig stetiger und gleichgradig beschränkter Funktionen. Nach dem Satz von Arzelà–Ascoli (Satz 2.6) enthält diese Folge eine gleichmässig konvergente Teilfolge $\{y_{N'}\}_{N'\in\mathbb{N}}$ mit einer Grenzfunktion $y \in C([a,b])$, d.h.

$$\lim_{N'\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |y_{N'}(x) - y(x)| = 0.$$

Für die Folge der Näherungslösungen $y_N(x)$ gilt auch die Darstellung

$$y_N(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F_N(s)\,ds \quad \text{für } x \in [a,b]$$

mit der Treppenfunktion

$$F_N(s) = \widetilde{f}(x_k, y_k) \quad \text{für } s \in (x_k, x_{k+1}).$$

Für $s \in (x_k, x_{k+1})$ ist

$$\begin{aligned} |F_{N'}(s) - \widetilde{f}(s,y(s))| &= |\widetilde{f}(x_k,y_k) - \widetilde{f}(s,y(s))| \\ &\le |\widetilde{f}(x_k,y_k) - \widetilde{f}(s,y_k)| + |\widetilde{f}(s,y_k) - \widetilde{f}(s,y_{N'}(s))| + |\widetilde{f}(s,y_{N'}(s)) - \widetilde{f}(s,y(s))|. \end{aligned}$$

Aufgrund der gleichmässigen Stetigkeit von $\widetilde{f}(x,y)$, und wegen $s \to x_k$, $y_{N'}(s) \to y_k$ für $N' \to \infty$, sowie wegen $y_{N'} \to y$ für $N' \to \infty$ folgt

$$\lim_{N'\to\infty} \max_{s\in[a,b]} |f_{N'}(s) - f(s,y(s)| = 0.$$

Die Folge der Treppenfunktionen $f_{N'}(s)$ konvergiert also gleichmässig gegen $f(s,y(s))$, aus

$$y_{N'}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_{N'}(s)\,ds$$

folgt also durch Grenzübergang $N' \to \infty$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,ds,$$

d.h. $y(x)$ ist Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x,y(x)), \quad y(x_0) = y_0.$$

■

Der Satz von Peano liefert die Existenz einer Lösung einer explizit gegebenen Differentialgleichung erster Ordnung im Fall einer stetigen Funktion $f(x,y)$. Es stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen, neben der Lipschitz–Stetigkeit von $f(x,y)$, auf Eindeutigkeit geschlossen werden kann. Hierzu benötigen wir zunächst einige Hilfssätze.

Lemma 2.1. *Seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $x \in (a,b]$ stetig differenzierbar und sei $\varphi(x) < \psi(x)$ für $x \in (a, a+\varepsilon)$ mit $0 < \varepsilon < b-a$. Dann gilt entweder*

i.
$$\varphi(x) < \psi(x) \quad \text{für alle } x \in (a,b],$$

oder

ii. es existiert ein $x_0 \in (a,b]$ mit
$$\varphi(x) < \psi(x) \quad \text{für } x \in (a,x_0), \quad \varphi(x_0) = \psi(x_0), \quad \varphi'(x_0) \geq \psi'(x_0)\,.$$

Beweis: Gilt *i.* nicht, so existiert ein $x_0 \in (a,b]$ mit $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ und $\varphi(x) < \psi(x)$ für alle $x \in (a,x_0)$. Da $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ stetig differenzierbar sind, folgt mit dem linksseitigen Differenzenquotienten
$$\varphi'(x_0) = \lim_{h\to 0+} \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x_0-h)}{h} \geq \lim_{h\to 0+} \frac{\psi(x_0) - \psi(x_0-h)}{h} = \psi'(x_0)\,.$$
■

Für eine Differentialgleichung
$$y'(x) = f(x, y(x))$$
bezeichnet
$$P[\psi](x) := \psi'(x) - f(x, \psi(x))$$
den Defekt, für eine Lösung y der Differentialgleichung folgt offenbar $P[y](x) = 0$.

Satz 2.7. *Seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $x \in (a,b]$ stetig differenzierbar und sei $\varphi(x) < \psi(x)$ für $x \in (a, a+\varepsilon)$ mit $0 < \varepsilon < b-a$. Aus $P[\varphi](x) < P[\psi](x)$ für $x \in (a,b]$ folgt dann $\varphi(x) < \psi(x)$ für alle $x \in (a,b]$.*

Beweis: Der Beweis erfolgt durch die Anwendung von Lemma 2.1. Existiert ein $x_0 \in (a,b]$ mit $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, so folgt nach Voraussetzung
$$\varphi'(x_0) = P[\varphi](x_0) + f(x_0, \varphi(x_0)) < P[\psi](x_0) + f(x_0, \psi(x_0)) = \psi'(x_0)$$
im Widerspruch zu $\varphi'(x_0) \geq \psi'(x_0)$, siehe Lemma 2.1, Behauptung *ii.* ■

Für eine in $\mathcal{B} := [a,b] \times [\alpha, \beta]$ erklärte Funktion $f(x,y)$ sei das Anfangswertproblem
$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{für } x \in [a,b], \quad y(a) = y_a, \quad (a, y_a) \in \mathcal{B}$$
gegeben. Die Funktionen $\underline{y}(x)$ und $\overline{y}(x)$ heissen Unterfunktion bzw. Oberfunktion des Anfangswertproblems, wenn sie in $[a,b]$ stetig differenzierbar sind und wenn
$$\underline{y}'(x) < f(x, \underline{y}(x)) \quad \text{für } x \in [a,b], \quad \underline{y}(a) \leq y_a$$
bzw.
$$\overline{y}'(x) > f(x, \overline{y}(x)) \quad \text{für } x \in [a,b], \quad \overline{y}(a) \geq y_a$$
gilt.

Lemma 2.2. *Seien $\underline{y}(x)$ und $\overline{y}(x)$ Unter– bzw. Oberfunktion zum Anfangswertproblem*

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \textit{für } x \in [a,b], \quad y(a) = y_a.$$

Für jede Lösung der Differentialgleichung gilt

$$\underline{y}(x) < y(x) < \overline{y}(x) \quad \textit{für alle } x \in (a,b].$$

Beweis: Zunächst ist

$$P[\underline{y}](x) = \underline{y}'(x) - f(x, \underline{y}(x)) < 0 = y'(x) - f(x, y(x)) = P[y](x).$$

Gilt $\underline{y}(a) < y(a) = y_a$, so gilt $\underline{y}(x) < y(x)$ für alle $x \in (a, a+\varepsilon)$ und geeignet gewähltes $\varepsilon > 0$. Gilt $\underline{y}(a) = y(a) = y_a$, so folgt

$$\underline{y}'(a) < f(a, \underline{y}(a)) = f(a, y(a)) = y'(a),$$

und somit folgt wiederum $\underline{y}(x) < y(x)$ für alle $x \in (a, a+\varepsilon)$ und geeignet gewähltes $\varepsilon > 0$. Die Behauptung $\underline{y}(x) < y(x)$ für alle $x \in [a,b]$ folgt jetzt unmittelbar aus Satz 2.7. Die obere Abschätzung folgt analog. ∎

Beispiel 2.19. *Gegeben sei das Anfangswertproblem*

$$y'(x) = x^2 + [y(x)]^2, \quad y(0) = 1.$$

Für $x > 0$ ist

$$f(x,y) = x^2 + y^2 > y^2 =: \underline{f}(x,y),$$

eine Unterfunktion ist also bestimmt als Lösung des Anfangswertproblems

$$\underline{y}'(x) = [\underline{y}(x)]^2 \quad \textit{für } x > 0, \quad \underline{y}(0) = 1.$$

Durch Trennung der Veränderlichen folgt

$$\int_1^{\underline{y}(x)} \frac{dz}{z^2} = \int_0^x ds, \quad \textit{d.h.} \quad -\frac{1}{\underline{y}(x)} + 1 = x, \quad \underline{y}(x) = \frac{1}{1-x} \quad \textit{für } x < 1.$$

Für $x \in (0,1)$ ist

$$f(x,y) = x^2 + y^2 < 1 + y^2 =: \overline{f}(x,y),$$

eine Oberfunktion ist also bestimmt als Lösung des Anfangswertproblems

$$\overline{y}'(x) = 1 + [\overline{y}(x)]^2 \quad \textit{für } x > 0, \quad \overline{y}(0) = 1.$$

Durch Trennung der Veränderlichen folgt

$$\int_1^{\overline{y}(x)} \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^x ds, \quad \textit{d.h.} \quad \arctan \overline{y}(x) - \frac{\pi}{4} = x, \quad \overline{y}(x) = \tan[x + \frac{\pi}{4}].$$

Damit folgt

$$\frac{1}{1-x} < y(x) < \tan[x + \frac{\pi}{4}].$$

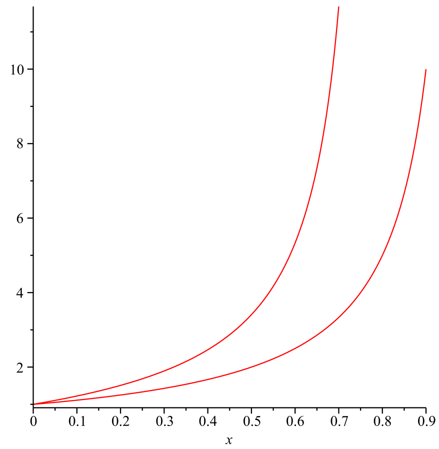

Abbildung 2.5: Ober– und Unterfunktion des Anfangswertproblems.

Satz 2.8. *Die Funktion $f(x,y)$ erfülle eine lokale Lipschitz–Bedingung*

$$f(x,y_1)-f(x,y_2)\le L(y_1-y_2) \quad \textit{für } x\in[a,b], \quad y_1>y_2.$$

Dann folgt aus

$$\varphi(a)\le\psi(a), \quad P[\varphi](x)\le P[\psi](x) \quad \textit{für } x\in[a,b]$$

die Ungleichung

$$\varphi(x)\le\psi(x) \quad \textit{für alle } x\in[a,b].$$

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis, d.h. es existiere ein Intervall $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ mit $\varphi(\alpha)=\psi(\alpha)$ und $\varphi(x)>\psi(x)$ für $x\in(\alpha,\beta]$. Definieren wir $w(x):=\varphi(x)-\psi(x)$, so gilt $w(\alpha)=0$ und $w(x)>0$ für $x\in(\alpha,\beta]$. Für die Ableitung dieser Funktion folgt unter Verwendung der Voraussetzung $P[\varphi](x)\le P[\psi](x)$ für $x\in[\alpha,\beta]\subset[a,b]$

$$\begin{aligned}
w'(x) &= \varphi'(x)-\psi'(x)\\
&= \varphi'(x)-f(x,\varphi(x))+f(x,\varphi(x))-\psi'(x)+f(x,\psi(x))-f(x,\psi(x))\\
&= P[\varphi(x)]-P[\psi](x)+f(x,\varphi(x))-f(x,\psi(x))\\
&\le f(x,\varphi(x))-f(x,\psi(x)).
\end{aligned}$$

Mit der Annahme $\varphi(x)>\psi(x)$ für $x\in(\alpha,\beta]$ folgt aus der lokalen Lipschitz–Bedingung

$$w'(x)=f(x,\varphi(x))-f(x,\psi(x))\le L(\varphi(x)-\psi(x))=L\,w(x),$$

d.h.

$$w'(x)-Lw(x)\le 0 \quad \text{für } x\in(\alpha,\beta].$$

Damit ergibt sich

$$\frac{d}{dx}\left[w(x)e^{-Lx}\right]=w'(x)e^{-Lx}-Lw(x)e^{-Lx}=[w'(x)-Lw(x)]e^{-Lx}\le 0.$$

Die Funktion $w(x)e^{-Lx}$ ist also monoton fallend und verschwindet in $x = \alpha$. Daher folgt $w(x) \leq 0$ für alle $x \in (\alpha, \beta]$ im Widerspruch zur Annahme $w(x) > 0$. ■

Folgerung 2.1. *Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei Lösungen des Anfangswertproblems*

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \textit{für } x \in [a, b], \quad y(a) = y_a.$$

Ist die Funktion $f(x, y)$ lokal Lipschitz–stetig, so folgt $y_1(x) = y_2(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis: Für den Defekt der Lösungen $y_i(x)$ gilt $P[y_i](x) = 0$ für $x \in [a, b]$, und es gilt die Anfangsbedingung $y_1(a) = y_2(a) = y_a$, Damit gilt $y_1(a) \leq y_2(a)$ und $P[y_1](x) \leq P[y_2](x)$ für $x \in [a, b]$, aus Satz folgt also $y_1(x) \leq y_2(x)$ für $x \in [a, b]$. Entsprechend folgt aus gilt $y_s(a) \leq y_1(a)$ und $P[y_2](x) \leq P[y_1](x)$ für $x \in [a, b]$ die Ungleichung $y_2(x) \leq y_1(x)$, und somit die Gleichheit $y_1(x) = y_2(x)$ für $x \in [a, b]$. ■

Hinreichend für die lokale Lipschitz–Bedingung

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) \leq L(y_1 - y_2) \quad \text{für } x \in [a, b], \quad y_1 > y_2$$

ist, dass die Funktion $f(x, y)$ bezüglich y monoton fallend ist.

Beispiel 2.20. *Zur Lösung des Anfangswertproblems*

$$y'(x) = 2x - 2\sqrt{\max\{y(x), 0\}}, \quad y(0) = 0$$

betrachten wir die Methode der sukzessiven Approximation

$$y^{k+1}(x) = 2\int_0^x \left[s - \sqrt{\max\{y^k(s), 0\}}\right] ds$$

mit der Startnäherung $y^0(x) = \alpha x^2$, $\alpha \in (0, 1)$. Für $\alpha_k \geq 0$ ist $\max\{\alpha_k s^2, 0\} = \alpha_k s^2$ und somit folgt, für $x > 0$,

$$y^{k+1}(x) = 2\int_0^x \left[s - \sqrt{\max\{\alpha_k s^2, 0\}}\right] ds = 2(1 - \sqrt{\alpha_k})\int_0^x s\, ds = (1 - \sqrt{\alpha_k})\, x^2 = \alpha_{k+1} x^2,$$

d.h.

$$\alpha_{k+1} = 1 - \sqrt{\alpha_k},$$

und wir erhalten die Fixpunktgleichung

$$\alpha = \Phi(\alpha) = 1 - \sqrt{\alpha}.$$

Der Fixpunkt $\alpha = \Phi(\alpha)$ ist Nullstelle von

$$f(\alpha) = \alpha + \sqrt{\alpha} - 1.$$

Wegen

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 1, \quad f'(\alpha) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} > 1$$

besitzt $f(\alpha)$ genau eine Nullstelle $\overline{\alpha} \in (0,1)$, d.h. $\Phi(\alpha)$ besitzt genau einen Fixpunkt $\overline{\alpha}$. Dieser ergibt sich als Lösung der quadratischen Gleichung

$$(\sqrt{\alpha})^2 + \sqrt{\alpha} - 1 = 0,$$

d.h.

$$\sqrt{\overline{\alpha}} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \overline{\alpha} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \approx 0.38197.$$

Als Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich somit

$$y(x) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 x^2 \,.$$

Für $y_1 < y_2 < 0$ ist

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = 2\sqrt{\max\{y_2,0\}} - 2\sqrt{\max\{y_1,0\}} = 0,$$

für $y_1 < 0 \le y_2$ ist

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = 2\sqrt{\max\{y_2,0\}} - 2\sqrt{\max\{y_1,0\}} = 2\sqrt{y_2} \ge 0,$$

und für $0 \le y_1 < y_2$ ist

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = 2\sqrt{\max\{y_2,0\}} - 2\sqrt{\max\{y_1,0\}} = 2\sqrt{y_2} - 2\sqrt{y_1} > 0.$$

Die Funktion $f(x,y)$ ist also bezüglich y monoton fallend und erfüllt daher eine lokale Lipschitz–Bedingung. Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig.

2.6 Implizite Differentialgleichungen erster Ordnung

Abschließend betrachten wir eine implizit gegebene Differentialgleichung erster Ordnung,

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0. \tag{2.35}$$

Dabei sei $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ als stetig vorausgesetzt. Durch die Differentialgleichung (2.35) wird ein Richtungsfeld als Menge aller Linienelemente $(x,y,p) \in \mathbb{R}^3$ definiert, welche die Gleichung

$$F(x,y,p) = 0 \tag{2.36}$$

erfüllt. Hat diese Gleichung für gegebenes (x,y) mehrere Lösungen p, so gibt es zu einem Punkt (x,y) mehrere Linienelemente p. Nach dem Satz über implizit gegebene Funktionen kann die Gleichung (2.36) in einer Umgebung eines Punktes $(x_0,y_0,p_0) \in D$ nach p aufgelöst werden, wenn die Funktionen $F(x,y,p)$ und $F_p(x,y,p)$ stetig sind, und wenn gilt

$$F(x_0,y_0,p_0) = 0, \quad F_p(x_0,y_0,p_0) \ne 0.$$

In einer Umgebung von (x_0, y_0) folgt dann die Darstellung

$$p = f(x, y)$$

mit einer stetigen Funktion $f(x, y)$. In diesem Fall heißt (x_0, y_0, p_0) reguläres Linienelement. Alle nicht–regulären Linienelemente werden singulär genannt. Eine Lösungskurve $y(x)$ der Differentialgleichung (2.35) heißt regulär bzw. singulär, wenn alle Linienelemente $(x, y, y'(x))$ regulär bzw. singulär sind. Ist (x, y, p) ein singuläres Linienelement, so heißt (x, y) singulärer Punkt.

Beispiel 2.21. *Betrachtet wird die Differentialgleichung*

$$[y'(x)]^2 = 4x^2, \quad F(x, y, p) = p^2 - 4x^2, \quad F_p(x, y, p) = 2p.$$

Sei $(x_0, y_0, p_0) \in \mathbb{R}^3$ gegeben mit $F(x_0, y_0, p_0) = p_0^2 - 4x_0^2 = 0$. Für $p_0 \neq 0$ ist die Gleichung

$$F(x, y, p) = p^2 - 4x^2 = 0$$

in einer Umgebung von (x_0, y_0, p_0) nach p auflösbar, d.h. für $p_0 \neq 0$ sind alle Linienelemente (x_0, y_0, p_0) regulär. Für $p_0 = 0$, d.h. für $x_0 = 0$, ist keine lokal eindeutige Lösbarkeit nach p gegeben, die Linienelemente $(0, y, 0)$ und die Punkte $(0, y)$ sind also singulär.

Die Gleichung $F(x, y, p) = p^2 - 4x^2 = 0$ hat offensichtlich die Lösungen

$$p_1 = 2x, \quad p_2 = -2x,$$

die Linienelemente sind also durch $(x, y, 2x)$ und $(x, y, -2x)$ gegeben. Zur Bestimmung der Lösung $y(x)$ sind also die Differentialgleichungen

$$y'(x) = 2x, \quad y'(x) = -2x$$

zu lösen, d.h.

$$y_1(x) = c_1 + x^2, \quad y_2(x) = c_2 - x^2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Im allgemeinen sind die Lösungen von Anfangswertproblemen implizit gegebener Differentialgleichungen nicht eindeutig, so sind zum Beispiel

$$y_1(x) = y_0 - x_0^2 + x^2, \quad y_2(x) = y_0 + x_0^2 - x^2$$

Lösungen des Anfangswertproblems

$$[y'(x)]^2 = 4x^2, \quad y(x_0) = y_0.$$

Eine eindeutige Lösung kann erst durch die Vorgabe von $y'(x_0) = \pm 2x_0$ bestimmt werden.

Im folgenden sollen Beispiele von impliziten Differentialgleichungen angegeben werden, welche eine geschlossene Lösung erlauben.

Sei $y(x)$ stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung (2.35). Besitzt die Ableitung $y'(x)$ eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion, hinreichend hierfür ist $y''(x) \neq 0$, so kann $p = y'(x)$ nach $x = X(p) = [y']^{-1}(p)$ aufgelöst werden und in der Folge erhalten wir

$$y(x) = y(X(p)) =: Y(p).$$

Dann ist

$$Y'(p) = \frac{d}{dp}Y(p) = \frac{d}{dp}y(X(p)) = y'(x)_{|x=X(p)}\frac{d}{dp}X(p) = pX'(p),$$

und für die implizit gegebene Differentialgleichung ergibt sich

$$F(x, y(x), y'(x)) = F(X(p), Y(p), p) = 0\,.$$

Zu bestimmen sind also Funktionen $(X(p), Y(p))$ als Lösung des Systems

$$F(X(p), Y(p), p) = 0, \quad Y'(p) = p\,X'(p). \tag{2.37}$$

Insbesondere beachte man jedoch, dass für eine konstante Ableitung $p = y'(x)$ keine Umkehrfunktion $x = X(p)$ existiert.

Beispiel 2.22. *Für die bereits betrachtete Differentialgleichung $[y'(x)]^2 = 4x^2$ ergibt sich $(X(p), Y(p))$ als Lösung des Systems*

$$p^2 = 4[X(p)]^2, \quad Y'(p) = p\,X'(p).$$

Daraus ergibt sich

$$X(p) = \pm\frac{1}{2}p, \quad Y'(p) = \pm\frac{1}{2}p, \quad Y(p) = c \pm \frac{1}{4}p^2, \quad c \in \mathbb{R},$$

und mit $p = \pm 2x$ folgt schließlich

$$y(x) = c \pm x^2.$$

Im folgenden sollen einige weitere Typen von implizit gegebenen Differentialgleichungen erster Ordnung angegeben werden, welche sich mit diesem Zugang geschlossen lösen lassen. Für die Differentialgleichung

$$F(x, y, y'(x)) = g(y'(x)) - x = 0 \tag{2.38}$$

ergibt sich

$$X(p) = g(p), \quad Y'(p) = p\,X'(p) = p\,g'(p)$$

und somit

$$Y(p) = \int p\,g'(p)\,dp.$$

Besitzt $g(p)$ eine Umkehrfunktion $p = g^{-1}(x)$, so folgt

$$y(x) = Y(g^{-1}(x))\,.$$

Beispiel 2.23. *Für die Differentialgleichung*

$$[y'(x)]^2 - x = 0$$

ergibt sich zunächst die Einschränkung $x \geq 0$. *Für* $g(p) = p^2$ *ist die Umkehrfunktion nicht eindeutig, d.h.* $p = \pm\sqrt{x}$. *Weiter ist*

$$Y(p) = \int p g'(p)\, dp = 2 \int p^2\, dp = \frac{2}{3}\, p^3 + c$$

und somit folgt

$$y(x) = Y(p) = \frac{2}{3}\, p^3 + c = \frac{2}{3}\, [\pm\sqrt{x}]^3 + c = \pm\frac{2}{3}\, x^{3/2} + c \quad \textit{für } x \geq 0.$$

Zur Probe ist

$$y'(x) = \pm\sqrt{x}, \quad [y'(x)]^2 - x = [\pm\sqrt{x}]^2 - x = 0\,.$$

Für die Differentialgleichung

$$F(x, y(x), y'(x)) = g(y'(x)) - y(x) = 0 \tag{2.39}$$

ergibt sich

$$Y(p) = g(p), \quad Y'(p) = p\, X'(p) = g'(p)$$

und somit

$$X(p) = \int \frac{g'(p)}{p}\, dp, \quad Y(p) = g(p)\,.$$

Existiert die Umkehrfunktion von $x = X(p)$, so erhalten wir als Lösung

$$y(x) = Y(p) = g(p) = g(X^{-1}(x))\,.$$

Offensichtlich ist $y(x) = g(0)$ eine weitere Lösung.

Beispiel 2.24. *Für die Differentialgleichung*

$$[y'(x)]^2 - y(x) = 0$$

ergibt sich zunächst die Einschränkung $y(x) \geq 0$. *Mit* $g(p) = p^2$ *ist*

$$X(p) = 2 \int dp = 2p + c, \quad Y(p) = p^2$$

und somit

$$p = \frac{1}{2}(c - x), \quad y(x) = \frac{1}{4}(c - x)^2 = \frac{1}{4}(x - c)^2\,.$$

Für die Differentialgleichung von Clairaut,

$$F(x, y, y'(x)) = y(x) - xy'(x) - g(y'(x)) = 0 \tag{2.40}$$

folgt

$$Y(p) = p\,X(p) + g(p), \quad Y'(p) = p\,X'(p) = X(p) + p\,X'(p) + g'(p),$$

also

$$X(p) = -g'(p), \quad Y(p) = g(p) - p\,g'(p).$$

Für $y'(x) = c$ ergeben sich mit

$$y(x) = c\,x + g(c)$$

offenbar weitere Lösungen der Differentialgleichung (2.40). Für $p = c$ ist

$$x = X(c) = -g'(c), \quad y = Y(c) = g(c) - cg'(c) = g(c) + c\,X(c) = c\,x + g(c),$$

d.h. der Punkt $(X(c), Y(c))$ der Lösungskurve liegt auf der Geraden $y(x) = c\,x + g(c)$, welche dort gleichzeitig Tangente an die Lösungskurve ist. Diese Lösungskurve wird als Enveloppe der Geradenschar bezeichnet.

Beispiel 2.25. *Für die Differentialgleichung*

$$y(x) = x\,y'(x) + e^{y'(x)}$$

ergibt sich die Geradenschar, für $y'(x) = c$,

$$y(x) = c\,x + e^c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Für die Berechnung der Enveloppe ist

$$g(p) = e^p, \quad X(p) = -g'(p) = -e^p, \quad Y(p) = g(p) - pg'(p) = (1-p)e^p.$$

Aus $x = -e^p$ für $p \in \mathbb{R}$ folgt zunächst $x < 0$ und somit

$$p = \ln(-x), \quad y(x) = x\Big[\ln(-x) - 1\Big] \quad \text{für } x < 0.$$

Für die Differentialgleichung von d'Alembert,

$$F(x, y(x), y'(x)) = y(x) - xf(y'(x)) - g(y'(x)) = 0, \tag{2.41}$$

ist

$$Y(p) = X(p)f(p) + g(p), \quad Y'(p) = p\,X'(p) = X'(p)f(p) + X(p)f'(p) + g'(p),$$

und zu lösen bleibt die lineare Differentialgleichung

$$X'(p) = \frac{X(p)f'(p) + g'(p)}{p - f(p)}.$$

Lineare Lösungen $y(x) = cx + g(c)$ treten genau dann auf, wenn $f(c) = c$ gilt.

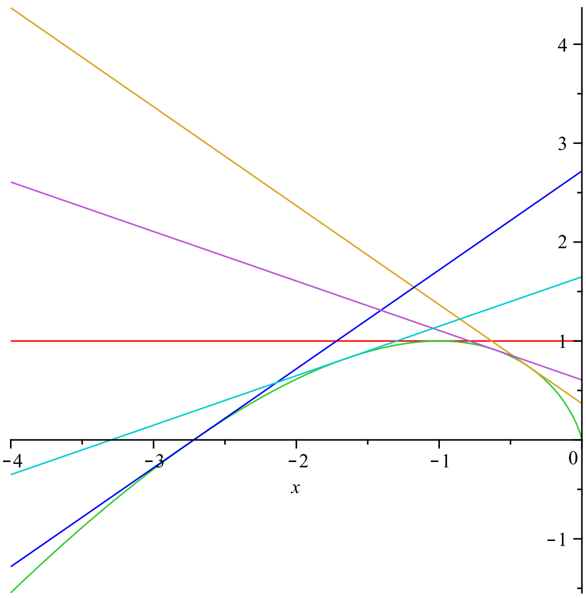

Abbildung 2.6: Geradenschar $y(x) = cx + e^c$ für $c = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ und Enveloppe.