Kapitel 1

Einleitung

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung zur Bestimmung einer unbekannten Funktion $y(x)$ mit einer unabhängigen Variablen x, in der auch Ableitungen, zum Beispiel $y'(x)$, der gesuchten Funktion auftreten.

Beispiel 1.1. *Als ein erstes Beispiel einer Differentialgleichung betrachten wir*

$$y'(x) + 2x\,y(x) = 0 \quad \textit{für}\; x \in \mathbb{R},$$

mit der allgemeinen Lösung

$$y(x) = c\,e^{-x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Die in Beispiel 1.1 angegebene Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, da Ableitungen maximal erster Ordnung auftreten. Die allgemeine Form einer implizit gegebenen Differentialgleichung erster Ordnung lautet

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0\,. \tag{1.1}$$

Beispiel 1.2. *Als Beispiel für eine implizit gegebene Differentialgleichung betrachten wir*

$$y'(x)y(x) + x = 0 \quad \textit{für}\; x \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion

$$F(x, y, y') := y'\,y + x$$

ist nichtlinear in y und y', die Differentialgleichung heißt nichtlinear.

Treten in einer Differentialgleichung auch Ableitungen höherer Ordnung auf, zum Beispiel Ableitungen der Ordnung m, so spricht man von einer Differentialgleichung der Ordnung m, welche implizit in der Form

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(m)}(x)) = 0 \tag{1.2}$$

gegeben ist. Eine Funktion $y(x)$, $x \in [a, b]$, heißt in einem Intervall $[a, b]$ Lösung der Differentialgleichung (1.2), falls $y(x)$ in $[a, b]$ m–mal stetig differenzierbar ist, und in $[a, b]$ die Differentialgleichung (1.2) erfüllt.

Kann die implizit gegebene Differentialgleichung (1.2) nach der höchsten auftretenden Ableitung $y^{(m)}(x)$ aufgelöst werden, so ergibt sich die explizit gegebene Differentialgleichung

$$y^{(m)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(m-1)}(x)). \tag{1.3}$$

Insbesondere lautet die explizite Darstellung einer Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(x) = f(x, y(x))\,. \tag{1.4}$$

Beispiel 1.3. *Für die in Beispiel* 1.2 *implizit gegebene Differentialgleichung und unter der Voraussetzung $y(x) \neq 0$ folgt die explizite Darstellung*

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}, \quad \textit{d.h. } f(x,y) = -\frac{x}{y}.$$

Betrachten wir Differentialgleichungen für Funktionen in einer Variablen, so sprechen wir von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Veränderliche beschreibt dabei entweder eine Ortsvariable x in einer Raumdimension, oder die Zeit t. Betrachten wir Funktionen in mehreren Variablen, zum Beispiel im Ort $x \in \mathbb{R}^n$ und in der Zeit t, und Gleichungen in deren partiellen Ableitungen, so sprechen wir von partiellen Differentialgleichungen.

In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns ausschließlich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen, bzw. mit Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Dabei wollen wir uns mit den folgenden Fragen beschäftigen:

- Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen;
- explizite Konstruktion von Lösungen;
- quantitatives Verhalten von Lösungen, zum Beispiel das Langzeitverhalten.

Statt von der Lösung einer Differentialgleichung spricht man auch von einem Integral der Differentialgleichung, bzw. bei einer geometrischen Interpretation von einer Lösungs– oder Integralkurve.

Die mathematische Modellierung vieler Prozesse in verschiedensten Bereichen der Natur- und Ingenieurwissenschaften führen auf gewöhnliche (und partielle) Differentialgleichungen. Klassische Beispiele sind Populationsmodelle oder Wachstumsprozesse, aber auch die Beschreibung chemischer Reaktionen. Ein einfaches Beispiel aus der Mechanik ist der freie Fall eines Körpers, oder die Bewegung eines Satelliten im Gravitationsfeld zweier Himmelskörper. Für die Herleitung der zugehörigen Modellgleichungen sei hier jedoch auf die entsprechenden Vorlesungen zur mathematischen Modellierung verwiesen, siehe zum Beispiel auch [3].