Technische Universität Graz
Institut für Angewandte Mathematik
Univ.–Prof. Dr. O. Steinbach

WS 2024/25
Blatt 6
15.11.2024

**Numerische Mathematik 2**

**16.** Gegeben ist die Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & c & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$$

mit $bc > 0$. Man zeige, daß $A$ die Eigenwerte

$$\lambda_k = a + 2\,\mathrm{sign}\,(c)\,\sqrt{bc}\cos\frac{k\pi}{n} \quad \text{für } k = 1,\ldots,n-1$$

und die Eigenvektoren $\underline{v}^k$ mit

$$v_\ell^k = m^\ell \sin\frac{k\ell\pi}{n} \quad \text{für } \ell = 1,\ldots,n-1, \quad m = \sqrt{\frac{c}{b}}$$

besitzt.

**Hinweis:** Man betrachte zunächst den Fall $a = 0$. Für die Eigenvektoren verwende man die Darstellung

$$v_\ell^k = \frac{m^\ell}{2i}\Big[e^{ik\ell\pi/n} - e^{-ik\ell\pi/n}\Big].$$

**17.** Für $u \in C^6([a,b])$ konstruiere man eine 5–Punkt–Differenzenformel der Form

$$D_2^{(5)}u(x) := \frac{1}{h^2}\Big[a_2 u(x+2h) + a_1 u(x+h) + a_0 u(x) + a_{-1}u(x-h) + a_{-2}u(x-2h)\Big].$$

Wie lautet die zugehörige Abschätzung des Approximationsfehlers?

**18.** Sei $S_h^1([0,1]) = \mathrm{span}\{\varphi_k\}_{k=0}^n \subset H^1([0,1])$ der Raum der stückweise linearen Funktionen bezüglich einem gleichmässigen Gitter mit der Maschenweite $h$. Man beweise die inverse Ungleichung

$$\int_0^1 [v_h'(x)]^2\,dx \le c\,h^{-2}\int_0^1 [v_h(x)]^2\,dx \quad \text{für alle } v_h \in S_h^1([0,1]).$$