Technische Universität Graz
Institut für Angewandte Mathematik
Univ.–Prof. Dr. O. Steinbach

WS 2024/25
Blatt 4
25.10.2024

Numerische Mathematik 2

10. Man untersuche die Konsistenzordnung und die Stabilität des Mehrschrittverfahrens von Milne–Simpson,

$$y_{k+2} = y_k + \frac{1}{3}h[f(x_k, y_k) + 4f(x_{k+1}, y_{k+1}) + f(x_{k+2}, y_{k+2})].$$

11. Gegeben sei das Mehrschrittverfahren

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = h[b_0 f(x_k, y_k) + b_1 f(x_{k+1}, y_{k+1})].$$

a) Man bestimme a_0, b_0 und b_1 in Abhängigkeit von a_1 so, dass man ein Verfahren von mindestens zweiter Konsistenzordnung erhält.

b) Für welche Werte von a_1 ist das Verfahren stabil?

12. Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\underline{u}'(t) = \begin{pmatrix} -1001 & 999 \\ 999 & -1001 \end{pmatrix} \underline{u}(t) \quad \text{für } t > 0, \quad \underline{u}(0) = \underline{u}^0 = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme eine explizite Formel für die Näherungswerte $\underline{u}^k$ für $\underline{u}(t_k)$ des expliziten Euler–Verfahrens für eine konstante Schrittweite $h > 0$. Unter welcher Voraussetzung an h verhält sich die Näherung für $t \to \infty$ wie die exakte Lösung?

b) Man bestimme eine explizite Formel für die Näherungswerte $\underline{u}^k$ für $\underline{u}(t_k)$ des impliziten Euler–Verfahrens für eine konstante Schrittweite $h > 0$. Wie verhält sich die Näherung für $t \to \infty$?

Die exakte Lösung ist

$$\underline{u}(t) = \frac{u_2^0 - u_1^0}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2000t} + \frac{u_1^0 + u_2^0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$