Technische Universität Graz
Institut für Angewandte Mathematik
Univ.–Prof. Dr. O. Steinbach
Dipl.–Ing. M. Gobrial

WS 2024/25
Blatt 3
18.10.2024

## Numerische Mathematik 2

**7.** Gegeben sei das Crank–Nicolson–Verfahren (Trapez–Verfahren)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2} h [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})] \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

zur näherungsweisen Bestimmung der Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.$$

Man zeige: Ist $f$ zweimal stetig differenzierbar, dann besitzt das Verfahren die Konsistenzordnung 2. Hinweis: Man verwende für den Beweis die Trapezformel für die numerische Integration.

**8.** Für die numerische Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) + \mu y(t) = 0 \quad \text{für } t \in (0, T), \quad y(0) = y_0, \quad \mu > 0,$$

sei $y_h(t)$ eine stückweise lineare stetige Funktion mit Stützstellen $t_k = kh$ für $k = 0, \ldots, N$, einer Schrittweite $h = T/N$, und

$$y_h(t) = y_{k-1} + \frac{1}{h}(t - t_{k-1})(y_k - y_{k-1}) \quad \text{für } t \in (t_{k-1}, t_k), \quad k = 1, \ldots, N.$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten $y_k$ für $k = 1, \ldots, N$ betrachte man die Forderung

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Big[ y_h'(t) + \mu y_h(t) \Big] dt = 0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, N.$$

Man gebe die Koeffizienten $y_k$ in Abhängigkeit von $y_0$ an!
Unter welchen Bedingungen an $\mu$ und $h$ bleiben diese beschränkt?

**9.** Für die numerische Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) + \mu y(t) = 0 \quad \text{für } t \in (0, T), \quad y(0) = y_0, \quad \mu > 0,$$

sei $y_h(t)$ eine stückweise lineare stetige Funktion mit Stützstellen $t_k = kh$ für $k = 0, \ldots, N$, einer Schrittweite $h = T/N$, und

$$y_h(t) = y_{k-1} + \frac{1}{h}(t - t_{k-1})(y_k - y_{k-1}) \quad \text{für } t \in (t_{k-1}, t_k), \quad k = 1, \ldots, N.$$

Mit $\varphi_\ell(t)$ für $\ell = 0, N$ werden die stückweise linearen und stetigen Basisfunktionen mit $\varphi_\ell(t_k) = \delta_{k\ell}$ bezeichnet. Zur Bestimmung der Koeffizienten $y_k$ für $k = 1, \ldots, N$ betrachte man jetzt die Forderung

$$\int_0^T \Big[ y_h'(t) + \mu y_h(t) \Big] \varphi_\ell(t) \, dt = 0 \quad \text{für } \ell = 0, \ldots, N-1.$$

Ist das zugehörige lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar?
Unter welchen Voraussetzungen an $\mu$ und $h$ ist die Wurzelbedingung erfüllt?