Numerische Mathematik 2

30. Für die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = 0 \text{ für } x \in (0,1),\ t > 0,\ u(t,0) = u(t,1) = 0,\ u(0,x) = u_0(x)$$

gebe man die Lösung in Abhängigkeit der Fourier–Koeffizienten von

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin k\pi x$$

an.

31. Für die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = 0 \text{ für } x \in (0,1),\ t > 0,\ u(t,0) = u(t,1) = 0,\ u(0,x) = u_0(x)$$

zeige man die Abschätzung

$$\|u(t,\cdot)\|_{L_2(0,1)} \leq e^{-8t} \, \|u_0\|_{L_2(0,1)} \, .$$

Hinweis: Man betrachte die Variationsformulierung im Ort und verwende die Abschätzung

$$\int_0^1 [v(x)]^2 \, dx \,\leq\, \frac{1}{8} \int_0^1 [v'(x)]^2 \, dx \quad \text{für alle } v \in H_0^1(0,1).$$

32. Für die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) &= 0 \quad \text{für } x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(t,0) = u(t,1) &= 0 \quad \text{für } t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x),\ \partial_t u(t,x)_{|t=0} &= 0 \quad \text{für } x \in (0,1), \end{aligned}$$

gebe man die Lösung in Abhängigkeit der Fourier–Koeffizienten von $u_0(x)$ an.