Technische Universität Graz | WS 2024/25
Institut für Angewandte Mathematik | Blatt 10
Univ.–Prof. Dr. O. Steinbach | 13.12.2024

Numerische Mathematik 2

28. Für $u \in L^2(0,T)$ seien

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\frac{t}{T}\right), \quad u_k = \frac{2}{T}\int_0^T u(s) \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\frac{s}{T}\right) ds,$$

und

$$(\mathcal{H}_T u)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\frac{t}{T}\right).$$

Man zeige

$$\int_0^T u(t)\,(\mathcal{H}_T u)(t)\,dt \geq 0.$$

29. Für die numerische Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) + \mu y(t) = 0 \quad \text{für } t \in (0,T), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0, \quad \mu > 0,$$

sei $y_h(t)$ eine stückweise lineare stetige Funktion mit Stützstellen $t_k = kh$ für $k = 0, \ldots, N$, einer Schrittweite $h = T/N$, und

$$y_h(t) = y_{k-1} + \frac{1}{h}(t - t_{k-1})(y_k - y_{k-1}) \quad \text{für } t \in (t_{k-1}, t_k), \quad k = 1, \ldots, N.$$

Mit $\varphi_\ell(t)$ für $\ell = 0, \ldots, N$ werden die stückweise linearen und stetigen Basisfunktionen mit $\varphi_\ell(t_k) = \delta_{k\ell}$ bezeichnet. Zur Bestimmung der Koeffizienten y_k für $k = 1, \ldots, N$ betrachte man jetzt die Forderung

$$-\int_0^T y_h'(t)\varphi_\ell'(t)\,dt + \mu \int_0^T y_h(t)\varphi_\ell(t)\,dt = 0 \quad \text{für } \ell = 0, \ldots, N-1.$$

Ist das zugehörige lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar?

Unter welchen Voraussetzungen an μ und h ist die Wurzelbedingung erfüllt?