Technische Universität Graz
Institut für Angewandte Mathematik
Univ.–Prof. Dr. O. Steinbach
Dipl.–Ing. Tobias Kaltenbacher

SS 2025
Blatt 3
10.4.2025

Numerische Mathematik 3

11. Sei $\tau_\ell \subset \mathbb{R}^3$ ein durch die Knoten $\{x_{\ell_i}\}_{i=1}^4$ beschriebenes finites Element. Man gebe eine lokale Parametrisierung bezüglich des Referenzelementes τ mit den Knoten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ an und berechne das Volumen Δ_ℓ.

12. Für das in Aufgabe **11.** beschriebene und als formregulär vorausgesetzte finite Element τ_ℓ sei

$$J_\ell = \begin{pmatrix} x_{\ell_2,1} - x_{\ell_1,1} & x_{\ell_3,1} - x_{\ell_1,1} & x_{\ell_4,1} - x_{\ell_1,1} \\ x_{\ell_2,2} - x_{\ell_1,2} & x_{\ell_3,2} - x_{\ell_1,2} & x_{\ell_4,2} - x_{\ell_1,2} \\ x_{\ell_2,3} - x_{\ell_1,3} & x_{\ell_3,3} - x_{\ell_1,3} & x_{\ell_4,3} - x_{\ell_1,3} \end{pmatrix}.$$

Man leite Abschätzungen $A \leq \lambda_{\min}(J_\ell^\top J_\ell) \leq \lambda_{\max}(J_\ell^\top J_\ell) \leq B$ für geeignete A und B in Abhängigkeit der lokalen Maschenweite h_ℓ her.

13. Gegeben sei das finite Element $\tau_\ell = (x_{\ell_1}, x_{\ell_2})$ mit der lokalen Maschenweite $h_\ell = \Delta_\ell$. Bezüglich der im Referenzelement τ gegebenen Formfunktionen

$$\psi_1(\eta) = 1 - \eta, \quad \psi_2(\eta) = \eta, \quad \psi_3(\eta) = 4\eta(1-\eta) \quad \text{für } \eta \in \tau = (0,1)$$

stelle man die Gramsche Matrix G_ℓ mit den Einträgen

$$G_\ell[j,i] = \Delta_\ell \int_0^1 \psi_i(\eta)\psi_j(\eta)\, d\eta \quad \text{für } i,j = 1,2,3$$

auf und berechne deren Eigenwerte.

14. Für $x \in \tau_\ell$ sei $v_h(x)$ durch die in Aufgabe **13.** beschriebenen Formfunktionen gegeben. Man beweise die inverse Ungleichung

$$\|v_h'\|^2_{L^2(\tau_\ell)} \leq c_I\, h_\ell^{-2}\, \|v_h\|^2_{L^2(\tau_\ell)}.$$

15. Das Gebiet $\Omega = (0,1)$ soll in n finite Elemente (x_{k-1}, x_k), $k = 1, \ldots, n$ mit Knoten $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_n$ und lokalen Maschenweiten $h_k = x_k - x_{k-1}$ für $k = 1, \ldots, n$ unterteilt werden. Dabei soll eine geometrisch skalierte Verfeinerung mit $h_{k+1} = q h_k$ für $k = 1, \ldots, n-1$ und $q > 1$ verwendet werden. Für vorgegebenes q und n bestimme man

$$h_{\min}, \quad h_{\max}, \quad \frac{h_{\max}}{h_{\min}}.$$

Man veranschauliche die Ergebnisse für alle möglichen Kombinationen von $q = 1.5$ und $q = 2$ bzw. $n = 4$ und $n = 8$. Stellen Sie die Unterteilungen graphisch dar!