Partielle Differentialgleichungen

19. Gegeben sei

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (0, \frac{1}{2}), \\ 0 & \text{für } x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Man bestimme $s \in \mathbb{R}$, für welche das Integral

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{1+2s}} \, dxdy$$

existiert.

20. Sei $u(x)$ für $x \in [0,1]$ stetig differenzierbar und sei $u(0) = 0$. Man beweise die Ungleichung

$$\int_0^1 [u(x)]^2 \, dx \leq c \int_0^1 [u'(x)]^2 \, dx$$

mit einer geeigneten Konstanten c. Kann diese verbessert werden, wenn $u(0) = u(1) = 0$ vorausgestzt wird?

21. Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ der zwei–dimensionale Einheitskreis mit Rand Γ, und sei

$$\widetilde{v}(r, \varphi) = (1-r)^\alpha \, .$$

Man bestimme $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß $\widetilde{v} \in H^1(\Omega)$ erfüllt ist. Gilt $\widetilde{v}_{|\Gamma} \in L^2(\Gamma)$?