Numerische Mathematik 1

10. Für die stückweise linear Interpolierende $f_2(x)$ der auf dem Intervall $[x_0, x_2] = [0.1, 1]$ gegebenen Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt die Fehlerabschätzung

$$\int\limits_{0.1}^{1} [f(x) - f_2(x)]^2 \, dx \, \leq \, \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{2} (x_i - x_{i-1})^4 \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |f''(s)|^2 \, ds \, .$$

Wie muß der Interpolationsknoten $x_1 \in (x_0, x_2)$ näherungsweise gewählt werden, damit beide Summanden auf der rechten Seite übereinstimmen?

11. Gegeben sei

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 0 & \text{für } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Für welche $s \in (0,1)$ existiert das Integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{[u(x) - u(y)]^2}{|x-y|^{1+2s}} \, dx \, dy \; ?$$

12. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Für $n \in \mathbb{N}$ und eine Schrittweite $h = 1/n$ seien die Stützstellen $x_k = kh$, $k = 0, \ldots, n$ gegeben. Mit den stückweise konstanten Basisfunktionen

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (x_{k-1}, x_k), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $k = 1, \ldots, n$ bezeichnet

$$f_h(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x)$$

eine stückweise konstante Funktion. Man bestimme die Zerlegungskoeffizienten bei Interpolation in den Elementmittelpunkten $\hat{x}_k = \frac{1}{2}(2k-1)h$ für $k = 1, \ldots, n$ und bei der L_2–Projektion. Man berechne den jeweiligen Fehler

$$\int_0^1 [f(x) - f_h(x)]^2 \, dx$$

in Abhängigkeit von h.

Hinweis:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1), \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2, \quad \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$