Technische Universität Graz
Institut für Angewandte Mathematik
Univ.–Prof. Dr. Olaf Steinbach
Dipl.–Ing. Mario Gobrial

SS 2024
Blatt 2
11.4.2024

Numerische Mathematik 3

6. Für einen beschränkten Operator $B : X \to Y^*$ und konforme Ansatzräume $X_M \subset X$, $Y_M \subset Y$ sei die diskrete inf-sup Bedingung

$$c_S \, \|v_M\|_X \leq \sup_{0 \neq q_M \in Y_M} \frac{\langle B v_M, q_M \rangle}{\|q_M\|_Y} \quad \text{für alle } v_M \in X_M$$

erfüllt. Anstelle der Variationsformulierung

$$\text{Finde } u_M \in X_M\text{:} \quad \langle B u_M, q_M \rangle = \langle f, q_M \rangle \quad \text{für alle } q_M \in Y_M$$

wird eine gestörte Variationsformulierung

$$\text{Finde } \widetilde{u}_M \in X_M\text{:} \quad \langle B \widetilde{u}_M, q_M \rangle = \langle \widetilde{f}, q_M \rangle \quad \text{für alle } q_M \in Y_M$$

betrachtet. Man leite eine Fehlerabschätzung für $\|u - \widetilde{u}_M\|_X$ her.

7. Sei $A : Y \to Y^*$ mit

$$\langle Aq, q \rangle \geq c_1^A \, \|q\|_Y^2, \quad \|Aq\|_{Y^*} \leq c_2^A \, \|q\|_Y \quad \text{für alle } q \in Y,$$

und sei $B : X \to Y^*$ mit

$$c_1^B \, \|v\|_X \leq \sup_{0 \neq q \in Y} \frac{\langle Bv, q \rangle}{\|q\|_Y}, \quad \|Bv\|_{Y^*} \leq c_2^B \, \|v\|_X \quad \text{für alle } v \in X.$$

Man zeige, dass $S := B^* A^{-1} B : X \to X^*$ beschränkt und elliptisch ist.

Sei $A : Y \to Y^*$ beschränkt und elliptisch, und sei $B : X \to Y^*$ beschränkt. Für konforme Ansatzräume

$$X_M = \text{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^M \subset X, \quad Y_N = \text{span}\{\psi_i\}_{i=1}^N \subset Y$$

sei die diskrete inf-sup Bedingung

$$c_S \, \|v_M\|_X \leq \sup_{0 \neq q_N \in Y_N} \frac{\langle B v_M, q_N \rangle}{\|q_N\|_Y} \quad \text{für alle } v_M \in X_M$$

erfüllt. Für $k = 1, \ldots, M$ und $i, j = 1, \ldots, N$ seien die Matrixen A_M und B_N durch die Einträge

$$A_N[j,i] = \langle A\psi_i, \psi_j \rangle, \quad B_M[j,k] = \langle B\varphi_k, \psi_j \rangle$$

definiert.

8. Man zeige, dass $S_M := B_M^\top A_N^{-1} B_M$ positiv definit ist.

Betrachtet wird die Variationsformulierung zur Bestimmung von $(p_N, u_M) \in Y_N \times X_M$, so dass

$$\langle Ap_N, q_N \rangle + \langle Bu_M, q_N \rangle = \langle Bu, q_N \rangle, \quad \langle p_N, Bv_M \rangle = 0$$

für alle $(q_N, v_M) \in Y_N \times X_M$ erfüllt ist, wenn $u \in X$ gegeben ist.

9. Man zeige die eindeutige Lösbarkeit dieser Variationsformulierung und schätze $\|u_M\|_X$ durch $\|u\|_X$ ab.

10. Man zeige, dass für $u = w_M \in X_M$ stets $u_M = w_M$ folgt.